Gottlob Frege

Conceitografia

Uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a da aritmética

Introdução, tradução e notas de Paulo Alcoforado, Alessandro Duarte e Guilherme Wyllie

1ª Edição

Editora do PPGFIL-UFRRJ

Núcleo de Lógica e Filosofia da Ciência

nulfic.org

Gottlob Frege

CONCEITOGRAFIA

Uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a da aritmética

Introdução, tradução e notas de Paulo Alcoforado, Alessandro Duarte e Guilherme Wyllie

1ª edição
Seropédica, RJ
PPGFIL-UFRRJ
2018

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ

Reitor: Ricardo Berbara
Vice-Reitor: Luiz Carlos Oliveira Lima
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação: Alexandre Fortes
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Filosofia: Affonso Henrique Vieira da Costa

EDITORA DO PPGFIL-UFRRJ

<www.editorappgfilufrrj.org>

Diagramação: Alessandro Duarte

Conceitografia: uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a aritmética [recurso eletrônico] / Gottlob Frege. Introdução, tradução e notas de Paulo Alcoforado, Alessandro Duarte e Guilherme Wyllie – Seropédica, RJ: PPGFIL-UFRRJ, 2018.

126 p.

ISBN 978-85-68541-05-0

1. Lógica. 2. Aritmética . 3. Logicismo. 4. Linguagem Formal. I. Título. II. Frege, Gottlob.

ISBN 978-85-68541-05-0

Software Livre
Este livro foi produzido com os seguintes programas livres: LaTeX 2ε (<https://latex-project.org/ftp.html>), LyX (<https://www.lyx.org/>) e Scribus (<https://www.scribus.net/>).

Sumário

INTRODUÇÃO

Friedrich Ludwig Gottlob Frege é sem dúvida uma das mais influentes figuras do pensamento contemporâneo, no que hoje chamamos de filosofia analítica. Contudo, pouco sabemos de seu cotidiano, de seus interesses pessoais e de sua personalidade. Nada tendo escrito sobre si mesmo, tudo o que a seu respeito conhecemos decorre de um ou outro breve depoimento de algum parente, aluno ou colega. Por tal razão, a narrativa de sua vida assume quase sempre o aspecto de um memorial. Matemático e filósofo, Frege nasceu em Wismar (Mecklenburg, sobre o mar Báltico) em 1848. Pouco se sabe a respeito da fase inicial de sua vida. Aparentemente, teria passado a infância e a adolescência em Wismar e cursado parte do ensino colegial sob a orientação dos professores Krain (pai e filho). Com vinte e um anos, na primavera de 1869, iniciou seus estudos matemáticos na Universidade de Jena, onde permaneceu até o inverno de 1870. No ano seguinte, ingressou na Universidade de Göttingen, em que permanece por cinco semestres, e da qual vem a receber o título de doutor, em dezembro de 1873, com uma tese sobre geometria. Em 1874, apresenta sua dissertação de docência (*Habilitationsschrift*), desta vez sobre cálculo, escrita provavelmente em Göttingen, pela qual foi nomeado *Privatdozent* da Faculdade de Matemática da Universidade de Jena e desse momento em diante tem início sua atividade docente. Cinco anos mais tarde, julho de 1879, é feito Professor extraordinário (*ausserordentlicher Professor*), e em maio de 1896 foi promovido a professor honorário (*ordentlicher Professor*) desta instituição em que ensinou por 44 anos. Ao que sabemos, Frege veio a lecionar sobre todas as áreas da matemática e também sobre seu próprio sistema lógico. Em 1918, contando 70 anos de idade, Frege se aposenta e logo a seguir se muda para a cidade de Bad Kleinen, situada no norte da Alemanha e próxima de Wismar, sua cidade natal, em que vem a morrer aos 77 anos, em 26 de julho de 1925.

De personalidade era tímido, introvertido, arredio, taciturno e propenso a depressões. Mantinha-se o quanto possível distante tanto dos alunos quanto dos colegas. Wittgenstein, visitando-o em 1920, nos diz que Frege só falava e só tinha interesse por lógica e matemática; e quando instado a se manifestar sobre outra coisa educadamente afastava o assunto e voltava a falar de lógica e matemática. De um ponto de vista religioso, ele poderia ser definido como um luterano liberal. Quanto a sua família, sabemos que Frege se casou com Margaret Lieseburg (nascida em 1856), mas não tiveram filhos. Por esta razão, em torno de 1900, não se sabe a data com precisão, a família veio a adotar um menino que recebeu o nome de Alfred Frege, mas que não teve a felicidade de conviver por muito tempo ao lado da mãe adotiva, pois Margaret falece em 1905. Alfred veio mais tarde a se tornar engenheiro e em 1944, mobilizado como soldado do exército alemão, morreu nas cercanias de Paris.

Não se erra muito ao dizer que suas ideias em vida foram pouco apreciadas e seus trabalhos pouco lidos, discutidos e conhecidos, se levarmos em conta a importância que elas encerram. Isto tem sido explicado de inúmeras maneiras: por seu sistema notacional envolver uma simbologia inusitada; pela extrema originalidade de suas ideias; pelas dificuldades técnicas inerentes às suas construções formais; e a pouca visibilidade de sua utilização e aplicabilidade. Por fim, há que se ter presente que as teorias de Frege, por constituírem um novo paradigma, não se inserem, como observou P.H. Nidditch, nem na matemática normal (já que seus interesses eram fundacionais), nem na filosofia normal de sua época (por seu anti-empirismo, anti-idealismo e anti-formalismo), nem na lógica normal (isto é, a lógica de orientação aristotélica ou então a álgebra de Boole-Schröder desenvolvida entre 1875 e 1900) de seu momento histórico. Por muito tempo, as ideias e doutrinas de Frege foram divulgadas e difundidas, sobretudo seus aspectos mais técnicos, não tendo por base seus textos, o estudo direto de suas obras, mas indiretamente por intermédio de autores — como, Russell, Peano, Wittgenstein etc — que nem sempre expressavam, com a devida fidelidade, o real conteúdo de seu pensamento. Contudo, Frege publicou, em vida, umas 40 obras, dentre as quais destacamos 2 teses, 4 livros, uns 24 artigos e diversas resenhas. Não se erra muito ao dizer que metade de seus escritos dizem respeito à filosofia e mesmo no âmbito da matemática pouca coisa foi feita fora da esfera da lógica. Deixou também uma rica e diversificada correspondência científica, assim como uma volumosa obra póstuma que só recentemente veio à luz. Em seu testamento, datado de 1925, Frege deixa para seu filho Alfred seus artigos, livros e cartas, muitos até então inéditos, afirmando que 'um dia chegará que certas coisas serão mais valorizadas do que hoje'. Este acervo — salvo provavelmente a correspondência que Alfred neste mesmo ano envia para a Biblioteca Nacional da Prússia — permaneceu na posse de Alfred até 1935, ano em que os transfere para as mãos de Heinrich Scholz, professor da Universidade de Münster, para serem editados. Contudo, por vicissitudes diversas, não foi possível sua publicação e com o advento da II Guerra Mundial foram todos, ou praticamente todos, destruídos, quando a aviação aliada arrasou a Biblioteca da Universidade de Münster (1945), lugar em que estavam depositados. Mas devido ao fato de muitos desses trabalhos terem sido transcritos e copiados, foi possível a publicação, na década de sessenta, de seus artigos inéditos (1969) e mais tarde, na década seguinte, a impressão de sua correspondência científica (1976).

Etapas de seu desenvolvimento. A atividade intelectual de Frege pode ser dividida em sua totalidade em seis etapas. Mas há que se ter presente que inevitavelmente sempre existe muito de arbitrário e convencional no estabelecimento de uma periodização deste gênero e que outras soluções alternativas seriam igualmente pensáveis.

O primeiro período vai de 1873 até 1883. Como é sabido, sua atividade de ensino e pesquisa tem início em 1873, com a apresentação de sua dissertação doutoral *Sobre uma Representação Geométrica das Figuras Imaginárias no Plano*, e tem prosseguimento no ano seguinte com a tese de docência *Métodos de Cálculo Baseados sobre uma Extensão do Conceito de Grandeza* na qual desenvolve um cálculo funcional que contém os germes de suas futuras contribuições à lógica. Para Frege, já se vai delineando como algo de fundamental que os tópicos básicos da matemática — isto é, seus conceitos e pressupostos iniciais — sejam totalmente explicitados e esclarecidos. Isto, aliás, virá a ser um dos objetivos subjacentes de suas obras e uma das motivações básicas de suas críticas e análises. No sentido de implementar suas ideias, ele vem a desenvolver o que denominou de *Begriffsschrift*, 'conceitografia', vale dizer, a lógica.

> A matemática foi meu ponto de partida. Em meu entender, a tarefa mais urgente era assegurar fundamentos mais eficazes para essa ciência. ... Para tais investigações, a imperfeição lógica da linguagem constituía um obstáculo. Procurei remediar este fato através de minha conceitografia. E assim fui levado da matemática para a lógica (Frege, 1969, p. 273).

De fato, com apenas 26 anos, já se apercebe das limitações e lacunas da matemática de seu tempo e, assim, se propõe a desenvolver um conjunto de instrumentos que possibilitem superar tais dificuldades. Neste momento, Frege já se preocupava em determinar os elementos últimos, até então nunca explicitados, mas que de fato se encontram na base formal da aritmética, para a partir dessas noções iniciais, reconstruir todo o arcabouço dessa ciência. Em 1879 vem a lume sua *Conceitografia, uma Linguagem Formular do Pensamento Puro Modelada sobre a da Aritmética*, onde procura proceder exatamente segundo essa atitude. Como já se disse, este livro viria a ser uma exposição renovada do que Leibniz entendera por *calculus philosophicus et ratiocinator*. Seu ponto de partida consiste em construir não uma explicação em linguagem corrente, mas uma linguagem por fórmulas (isto é, um sistema formal ou um simbolismo) cujas noções, sentenças e regras básicas fossem fixadas com precisão e clareza (isto é, modelada sobre a da aritmética), e a partir disto, excluindo toda intuição, definir com toda a exatidão o que vem a ser uma prova e ainda desenvolver, sem quaisquer lacunas ou pressupostos tácitos, provas totalmente formalizadas pela exclusiva utilização de regras formais aplicadas aos axiomas. Em outros termos, ele se propunha a estabelecer que toda e qualquer etapa, sem exceção, de uma demonstração aritmética (o mesmo não cabe ser dito da geometria) tem que proceder, próxima ou remotamente, das leis gerais da lógica e não da intuição pura. Nesta obra, não só nos deparamos com a invenção do sistema formal, mas também do cálculo proposicional e do cálculo dos predicados com igualdade. Assim concebida, a conceitografia torna-se o instrumento perfeito para representar e executar provas matemáticas. Nisto reside a diferença básica entre o sistema criado por Frege e a lógica algébrica de Boole e Schröder, que nunca tiveram a pretensão de formalizar a noção matemática de prova. Seu sistema notacional discrepa dos demais por utilizar o aspecto bidimensional da página, em que antecedente e consequente da condicional se encontram em linha diferentes. (Mas sabemos que logo veio a ser, por razões de comodidade, abandonado e substituído pela notação elaborada por Peano). Ele parte não da noção de conceito — como se dá com frequência na lógica tradicional, mas da noção de juízo, e distingue nitidamente juízo (*Urteil*) de conteúdo asserível (*beurteilbar Inhalt*), vale dizer, da mera combinação de representações. Enumera quatro noções primitivas (negação, implicação, quantificação universal e igualdade), nove axiomas e as regras de inferência, sem enunciar, porém, de maneira explícita a regra de substituição. Chega a soluções da mais alta originalidade e importância, como rejeitar a análise do juízo em sujeito e predicado em favor das noções de função e argumento; associa o quantificador à variável para expressar a generalidade; estabelece a noção de sequência (*Reihe*) por meios estritamente lógicos; introduz as noções de ancestral de uma relação e de propriedade hereditária em uma sequência; e deste modo, obtém como teorema o princípio de indução matemática que, em seu tempo era tido como um princípio primitivo e fundamental da matemática. Por fim, há quem entenda que Frege não se põe a questão da consistência e da completude de sua teoria por entender que a conceitografia não é um sistema formal. Logo após a sua publicação, ele redige três pequenos artigos onde esclarece e defende as posições assumidas em seu livro.

Ao escrever o artigo 'Aplicações da Conceitografia' (1879), seu principal intuito era 'dar alguns exemplos de como, mediante sua conceitografia, relações aritméticas e geométricas podem ser expressas' e que não poderiam ser veiculadas nem pela lógica tradicional, de orientação aristotélica, nem pela lógica algébrica, de orientação booleana. A seguir, Frege escreve outro trabalho, menos técnico, 'Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia' (1882), em que chama a atenção para os 'mal-entendidos' e 'erros' que 'têm origem na imperfeição da linguagem' ordinária. Para tornar possível a exatidão e contornar os inevitáveis equívocos oriundos das linguagens naturais, é necessário que estas sejam substituídas — nos contextos em que for o caso — por uma linguagem logicamente perfeita, isto é, uma conceitografia. E, por fim, neste mesmo ano, ele profere a conferência 'Sobre a Finalidade da Conceitografia'(1883), cujo objetivo, como o título sugere, é mostrar a finalidade ou aplicabilidade da conceitografia, e polemizando com E. Schröder, o corifeu da lógica algébrica alemã, Frege expõe porque o sistema de Boole não pode substituir seu sistema conceitográfico.

O segundo período se confina ao ano de 1884, data da publicação de *Os Fundamentos da Aritmética* e, portanto, perdura por um único ano. É, sem dúvida, o mais lido, o mais acessível e o mais filosófico de seus livros. Aqui, ele exclui toda notação de natureza lógica ou matemática e se cinge à discussões filosóficas e fundacionais acerca da aritmética. Este livro encerra uma exposição informal e preliminar de uma filosofia da aritmética. Em grandes linhas, trata-se de estudo expositivo e crítico das teorias já apresentadas acerca da noção de número e de outras noções fundamentais da aritmética e pode ser tomado como uma preparação ou introdução aos *Grundgesetze der Arithmetik*. Com efeito, após esboçar seus objetivos, ele passa à análise das concepções dominantes em seu tempo sobre a natureza do número e da verdade aritmética. Esta é a parte negativa da obra e consiste, essencialmente, no exame crítico das diversas concepções subjacentes às investigações fundacionais de sua época, vale dizer, ao formalismo — para o qual os números se reduziriam ao sinal (ou símbolo) enquanto mero objeto material —, ao empirismo — segundo o qual estes seriam meros conceitos empíricos oriundos da percepção de agregados de objetos materiais —, e ao psicologismo — consoante o qual os números seriam objetos de natureza psicológica e subjetiva produzidos pelas leis inerentes ao pensar, o que leva a identificar as leis da lógica, de natureza prescritiva, com as leis da psicologia, de natureza descritiva. Indo além, Frege é levado a rejeitar a concepção kantiana, segundo a qual tanto as verdades da aritmética como as da geometria são sintéticas *a priori*. Finda esta etapa crítica, ele se volta para uma atitude mais construtiva em que se propõe a definir os objetos e conceitos da aritmética, mostrando os procedimentos que cabem ser utilizados no sentido de provar, por meios puramente lógicos, seus enunciados.

Sua teoria é a de que uma atribuição numérica é uma asserção sobre um conceito. Portanto, poder-se-ia pensar que Frege defenderia que os números (cardinais) são propriedades de conceitos (de primeira ordem), ou seja, conceitos sob os quais caem conceitos (conceitos de segunda ordem). Entretanto, essa não exatamente a posição de Frege, uma vez que ele rejeita uma tal definição nas §§55-57 dos *Fundamentos*. De acordo com Frege, números são objetos que estão intimamente ligados aos conceitos numéricos. Para definir rigorosamente o que é número, ele é levado a introduzir a noção de equinumérico (*gleichzahlig*, 'igualdade numérica') para com ela designar a relação que existe entre dois conceitos, digamos F e G, sempre que as classes que eles determinam possam ser postas em relação biunívoca; quando isto se der, pode-se dizer que o número que pertence ao conceito F é o mesmo que pertence ao conceito G. Já que a igualdade de numérica entre conceitos vem a ser a existência da correspondência biunívoca (isto é, um-a-um) entre suas extensões, pode-se fixar a definição: o número que pertence ao conceito F é a extensão do conceito 'equinumérico ao conceito$F$' (ou seja, é a classe dos conceitos que são equinuméricos ao conceito F). Uma vez estabelecidas todas essas noções, torna-se possível definir cada número natural isoladamente. Assim, zero é o número cardinal que pertence ao conceito 'não igual a si mesmo'; um é o número cardinal que pertence ao conceito 'igual zero'; dois é o número cardinal que pertence ao conceito 'igual zero ou a um', etc.

Como se vê, segundo Frege, os números (cardinais) e as demais noções fundamentais da aritmética podem ser definidos com exatidão, em última instância, levando-se em conta apenas as noções da lógica formal; e as proposições acerca dos números (isto é, os teoremas da aritmética) podem ser derivadas a partir dos axiomas e das regras de transformação da lógica. O que acabamos de dizer equivale a excluir qualquer apelo à intuição e à percepção sensorial, e vem a ser o que se denomina de 'programa logicista'. O logicismo de Frege, porém, tem um escopo distinto do logicismo de Russell, pois enquanto este procurou em seus *Principia Mathematica* reduzir toda a matemática à lógica, Frege divisou esta possibilidade apenas para a aritmética elementar e a análise. Da geometria, no entanto, sempre teve uma concepção distinta e, assim como Kant, ele também admite que esta seria constituída de verdades sintéticas *a priori* sendo, por tal razão, irredutível à lógica.

O terceiro período transcorre entre 1885 e 1892. Nestes sete anos, Frege se preocupa essencialmente em clarificar, de um lado, as noções de objeto, conceito e função, e as relações que se dão entre as mesmas e, de outro, as noções de sentido e referência, e suas relações. Neste momento, Frege se tornou consciente de diversas dificuldades existes em algumas de suas obras anteriores e que exigiam mudanças e refinamentos. Entre essas dificuldades contam três de maior relevância: a questão da igualdade, a análise do conteúdo significativo das expressões em sentido e referência e a substituição da noção de conteúdo asserível pela de valor de verdade, noção de grande relevância, sobretudo, na *Conceitografia*. Tais noções constituem o núcleo de sua ontologia e de sua filosofia da linguagem. E aqui Frege é levado a escrever oito trabalhos dentre os quais destacamos três, da máxima importância no domínio de sua ontologia e de sua filosofia da linguagem: o opúsculo 'Função e Conceito' (1891), e os artigos 'Sobre o Sentido e a Referência'(1892), 'Sobre o Conceito e o Objeto' (1892) e ainda 'Digressões sobre o Sentido e a Referência' (1892/5) só publicado após sua morte, e no qual aprofunda as questões semânticas suscitadas pelas expressões predicativas e conceituais. Estes trabalhos encerram importantes extensões e refinamentos de doutrinas anteriormente expostas na *Conceitografia* (1879) e nos *Fundamentos de Aritmética* (1884).

Em 'Função e Conceito' ele generaliza a noção de função, e introduz a dicotomia função/argumento em sua análise da sentença. Entende que as sentenças são nomes próprios de dois objetos: o verdadeiro e o falso. Objeto é, em seu entender, qualquer coisa que possa ser designada por um nome próprio e que possa exercer o papel de argumento ou valor de uma função. Função e objeto são os dois aspectos fundamentais da realidade. Tudo quanto existe, na mais ampla acepção termo, ou é função ou é objeto. Esses dois modos de ser são irredutíveis: nada pode ser, simultaneamente, função e objeto. Neste opúsculo, ele ainda introduz um objeto dito *Wertverlauf*, 'percurso de valor', de caracterização um tanto complicada.

Em seu artigo 'Sobre o Sentido e a Referência', aprofunda e desenvolve a questão semântica. De início, ele diz que a sentença 'A estrela da manhã é igual a estrela da manhã', por ser uma instância do princípio de identidade, nada informa de original. Mas, as sentenças 'A estrela da manhã é igual a estrela da tarde' e 'A estrela da manhã não é igual a estrela da tarde' expressam importantes informações astronômicas. Deste modo, é possível alguém admitir a primeira e rejeitar a segunda. Elas diferem, portanto, naquilo que Frege chama de 'valor cognitivo'. Aqui, a noção de conteúdo, empregada em obras anteriores, é decomposta em sentido e referência. Em princípio, toda expressão expressa um sentido e designa um referente. O referente de uma expressão é aquilo que ela designa. Assim, os termos '$2+2$' e '$6-2$' se referem ou designam o mesmo referente, isto é, 4. Em outros termos, se a e b são nomes distintos que se referem a (ou designam) um mesmo objeto, pode-se nesse caso escrever que '$a = b$', mas o '=' não pode ser tomado como uma relação que se dá entre nomes, mas como uma relação que tem lugar entre objetos. De modo geral, uma sentença se refere ou designa seu valor de verdade, isto é, o verdadeiro ou o falso; neste caso, o verdadeiro e o falso são por Frege assimilados a objetos. Por outro lado, o sentido de uma expressão é o modo pelo qual essa expressão determina ou apresenta seu referente. Como vimos, os dois termos acima têm o mesmo referente, mas o primeiro se refere ao número 4 de um modo (isto é, através de uma adição) enquanto que o segundo se refere a esse número de outro modo (isto é, mediante uma subtração). Como dissemos acima, o modo de apresentar o referente é o que constitui o sentido de uma expressão, não importa se esta é uma palavra isolada ou se é uma sentença completa.

Neste mesmo ano, aparece 'Sobre o Conceito e o Objeto', um artigo em que procura desfazer os equívocos acerca de sua noção de conceito tal como fora formulada nos *Fundamentos da Aritmética*, aprofundando o que cumpre entender por conceito e objeto, dois conceitos centrais de sua filosofia. Mas, na verdade, Frege sustenta que nem conceito nem objeto podem ser definidos, mas tão-somente explicados ou descritos. Como este livro não a desenvolve com a devida clareza, Benno Kerry foi levado a dizer que a noção fregeana de conceito é inconsistente. Pois Frege se utiliza para falar do conceito F da expressão 'o conceito F', expressão esta que fregeanamente falando é, por conter o artigo definido, um nome próprio e, assim, não pode ter como referente um conceito, mas um objeto. Frege rechaça esta afirmação e nega que tenhamos aqui uma inconsistência, tendo em vista as limitações da linguagem corrente para expressar com clareza os aspectos da distinção conceito/objeto.

O quarto período transcorre entre 1893 e 1903, quando Frege escreve seus *Grundgesetze der Arithmetik*, em 2 vols., e marca a volta a seu antigo ideal de rigor e exatidão. Trata-se de seu mais importante livro, que tem por objetivo levar a cabo, da maneira a mais sistemática e com extremo rigor formal, seu projeto de redução da aritmética à lógica, que ele expusera de início nos *Fundamentos de Aritmética* (1884), efetuando todas as demonstrações mediante o mais rigoroso aparato formal, sendo assim uma extensão e um aprofundamento da *Conceitografia*. Trata-se, pois, de um refinamento e aprofundamento de tudo que antes produzira. No primeiro volume desta obra, publicado em 1893, fica em definitivo estabelecido que para a implementação de seu programa é indispensável apresentar a aritmética como um sistema axiomatizado. Mas aqui ele constata que nem seus termos primitivos e nem suas proposições primitivas tinham que ser termos ou proposições da aritmética. Pelo contrário, sua grande contribuição foi ter desenvolvido a aritmética sem determinar seus termos e enunciados primitivos (sua base axiomática), uma vez que estes, e todos os seus demais componentes, podem ser derivados da conceitografia. Tal feito é que veio a ser mais tarde denominado de 'logicismo'. Nesse sentido, ele reconstrói seu sistema formal de 1879, imprimindo o mais alto padrão de rigor formal. A axiomática aqui utilizada difere da que encontramos na *Conceitografia* pelo fato de envolver um número menor de axiomas e maior de regras dedutivas. Uma teoria ingênua dos conjuntos é também pela primeira vez introduzida, fato este que o levou a postular um axioma, o Axioma V, que possibilita sua manipulação, mas que conduziu sua axiomática a uma contradição, mais tarde denominada 'paradoxo de Russell'. Além destas modificações, ele torna a explicar seu sistema notacional, a teoria dos números cardinais, a noção de ordenação numa sequência e chega a provar os axiomas de Peano. Ele vai além e estende a teoria logicista aos números reais estabelecendo um conjunto de resultados iniciais. Isto, contudo, seria o objeto do terceiro volume das *Leis Fundamentais da Aritmética* que nunca chegou a ser escrito. A seguir, tece diversas digressões de natureza filosófica a respeito do psicologismo, do formalismo e outros tópicos afins. Este volume, porém, encerrava apenas uma parte de tudo quanto teria de desenvolver para completar seu intento de reduzir a aritmética à lógica. Desta forma, o primeiro volume como que estaria a exigir um segundo que o viesse a completar. No entanto, ele não o fez de imediato. Antes de o segundo volume ser impresso, o que só ocorrerá dez anos mais tarde, Frege escreveu seis artigos versando sobre sua conceitografia e a noção de número.

Assim, em 1894, publica uma resenha da *Filosofia da Aritmética* de E. Husserl, em que critica seu psicologismo causando tal impressão em seu autor, que foi levado não só a abandonar esta doutrina como a se converter em um de seus ardorosos adversários. No ano seguinte, vem à luz seu artigo 'Elucidações Críticas a alguns Tópicos de E. Schröder, *Lições de Álgebra da Lógica*' em que rebate a afirmação de Schröder de que sua lógica seria superior à de Frege. No mesmo ano, escreve o artigo 'O Número Inteiro' em que discute a concepção formalista de E. Ballue a respeito de número inteiro. Em 1896, envia uma carta a G. Peano, notável lógico e matemático italiano, em que responde a cada uma de suas críticas a seu livro *Grundgezetze*. Também neste ano, vem a lume 'Sobre a minha Conceitografia e a do Sr. Peano' em que expõe seu sistema conceitográfico e o compara com o de Peano, mostrando a visível superioridade do primeiro em relação ao segundo. Por fim, em 1899, publica 'Sobre os Números do Sr. H. Schubert' em que critica e satiriza o verbete que este escrevera para uma enciclopédia de ciências matemáticas.

Em 1902, a redação do segundo volume das *Leis Fundamentais da Aritmética* estava praticamente concluída e Frege sentia-se totalmente realizado no que respeita à concretização de seu projeto, uma vez que, nessa obra, ele acreditava ter efetivamente demonstrado, uma vez por todas, que a aritmética tem seu fundamento na lógica. Nesta obra, ele desenvolve conceitograficamente as noções de número negativo, racional, irracional e complexo, além das operações usuais entre os elementos dessas espécies numéricas, encerrando assim a discussão em torno das noções essenciais não só da aritmética, mas da própria análise matemática. No entanto, em junho de 1902, Bertrand Russell escreve-lhe uma carta mostrando que seu sistema axiomático era inconsistente, vale dizer, implicava um paradoxo que se tornou conhecido, como acima dissemos, como o 'paradoxo de Russell', isto é, o paradoxo que diz respeito ao conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos. (Mas apesar deste paradoxo, Russell ainda assim estava convencido da possibilidade de derivar a aritmética da lógica). Este paradoxo decorre da Lei Fundamental V, essencial para a obtenção da aritmética a partir da lógica. Em termos mais precisos, além do aparato estritamente lógico, o sistema das *Leis Fundamentais* é ainda levado a admitir uma teoria ingênua dos conjuntos para se chegar à definição de número e que torna possível a emersão do paradoxo Russell. Frege procurou durante todo o verão encontrar um modo de alterar essa Lei Fundamental a fim de evitar esse paradoxo. Os resultados a que chegou, ele os publicou em um apêndice a esse segundo volume (II, p. 253ss). Mais tarde, veio a se mostrar que mesmo com esses reparos, esta Lei ainda assim origina este paradoxo. Mais tarde, Russell tentará eliminar este paradoxo pela utilização da teoria dos tipos. Este fato foi por ele interpretado como a ruína de todo o seu sistema — o que é, aliás, verdadeiro no que concerne a seu esforço de logicizar a aritmética, mas falso se estiver em questão o sistema lógico por ele desenvolvido. Após a publicação do segundo volume das *Leis Fundamentais da Aritmética* (1903), Frege não mais se ocupará de grandes trabalhos acerca de lógica e fundamentação da matemática.

No quinto período de sua atividade acadêmica, que vai de 1903 a 1917, Frege publica oito trabalhos, a maior parte de natureza polêmica, reagindo aos novos rumos do pensamento matemático e a sua fundamentação. Ainda neste momento, escreve um conjunto de trabalhos sobre os fundamentos da geometria — 'Notas de Frege sobre *Os Fundamentos de Geometria* de Hilbert' (1903-?), 'Sobre os Fundamentos da Geometria'(1903), 'Sobre os Fundamentos da Geometria, II'(1903) e 'Sobre os Fundamentos da Geometria, I, II, III'(1906). Alguns desses trabalhos decorrem, em certo sentido, da correspondência que mantivera com Hilbert antes da descoberta do paradoxo de Russell, outros porém constituem uma apreciação crítica da concepção de axiomática de Hilbert e da doutrina da definição implícita dos termos que ocorrem no contexto dos axiomas. Em 1904, publica o artigo 'Que é uma Função?' em homenagem a Ludwig Boltzmann pelo seu sexagésimo aniversário de nascimento, em que submete as noções de função e variável a uma detida análise. E ainda dois outros estudos em que responde as objeções de J. Thomae e ataca a concepção formalista de aritmética: 'Resposta à Palestra de Férias de Thomae' (1906) e 'A Impossibilidade da Aritmética Formal de Thomae sob uma nova consideração' (1908). Observe-se que já em 1885 ele publicara seu famoso artigo 'Sobre as Teorias Formais da Aritmética', em que examina detidamente a teoria formalista.

O sexto período vai de 1918 até sua morte em 1925. Em 1918, Frege se propõe a tarefa de escrever um amplo tratado de lógica filosófica, o que aliás nunca veio a se consumar. Disto, resultaram as chamadas *Investigações Lógicas*, a saber, 'O Pensamento' (1918), 'A Negação'(1918), 'Pensamentos Compostos'(1923) e ainda, ao que parece, 'Generalidade Lógica'(1923/5), esta última só postumamente publicada. Nas *Investigações*, observamos que Frege tende para uma perspectiva menos formal, mais especulativa, reflexiva e exploratória. Nelas, ele analisa as relações entre pensamento e inferência ou, segundo outra maneira de ver, os vínculos entre lógica e psicologia filosófica. Ele ainda se indaga sobre os nexos entre lógica, linguagem, pensamento e realidade. Estes trabalhos representam um dos momentos mais altos de seu pensamento, sendo de se lastimar que não tenham merecido a atenção devida. Eles, em conjunto, abrem uma dupla vertente nas especulações fregeanas. De um lado, constituem um novo modo de abordar o cálculo sentencial, procurando definir os conectivos lógicos por meios operatórios, em vez da definição axiomática. Por outro lado, abrem novos roteiros em lógica filosófica através das discussões que desenvolvem em torno das noções de verdade, negação, sentença, pensamento, asserção, etc. Cumpre ainda mencionar outro estudo, igualmente de índole filosófica: 'As Fontes de Conhecimento em Matemática e em Ciências Naturais Matemáticas' (1924/5).

Nos últimos anos de vida, a partir de 1923, Frege abandona, assim parece, seu ideal logicista e sustenta que a teoria dos conjuntos, que se encontra no centro de todo esse engano, é um formidável equívoco que enganou a ele e a outros mais. Porém, como cumpre fundamentar, especificamente a aritmética, e de maneira mais ampla a matemática, Frege entende que a aritmética não mais se fundamentaria na lógica — como antes pensara — mas na geometria. Tal é o que se depreende de dois pequenos artigos 'Números e Aritmética' (1924-5) e 'Nova Tentativa de Fundamentar a Aritmética' (1924/5), só postumamente publicados. E se assim é, as verdades da matemática teriam o *status* das verdades da geometria, sendo também elas verdades sintéticas *a priori*. Tais ideias, porém, nunca foram aprofundadas e devidamente desenvolvidas e, deste modo, não se erra muito ao dizer que ficaram no plano da mera especulação.

Domínios de investigação. A inegável importância de Frege no domínio da lógica e da filosofia da matemática decorre essencialmente de três grandes contribuições que a ele deve a história do conhecimento. Em primeiro lugar, o de ter criado a moderna lógica matemática — como vemos pela primeira vez em seu livro *Begriffsschrift*, publicado em 1879 — cuja importância só é comparável aos *Primeiros Analíticos* de Aristóteles, livro com que se inaugura a própria história da lógica formal. Com efeito, a atividade científica de Frege consiste em ter descoberto e elucidado as mais elementares, profundas e fundamentais relações que se dão entre os conceitos e proposições da matemática. Tais relações, uma vez estabelecidas, foram por ele rotuladas de início de 'conceitográficas' e, mais tarde, de 'lógicas'. Daí por diante, a lógica passa a ser o estudo ordenado e sistemático de tais relações elementares. Em seu livro *Conceitografia*, a ordenação deste estudo assume um duplo patamar. Em primeiro lugar e de modo o mais fundamental, consiste em investigar as relações interproposicionais — como implicação, negação etc. — originando assim o que veio a ser chamado posteriormente de 'cálculo proposicional' (§5-7). Em segundo lugar, as relações intraproposicionais — a partir das noções de variável, constante, função, argumento e quantificação — que constituem o objeto de estudo do que foi mais tarde denominado de 'cálculo dos predicados' (§9-12). Como estes dois cálculos — isto é, o cálculo proposicional e o cálculo dos predicados de primeira ordem — constituem o que correntemente se chama de 'lógica elementar', pode-se dizer que a *Conceitografia* — que em grandes linhas pode ser considerada um tratado de lógica matemática — encerra a primeira exposição de que se tem conhecimento da lógica elementar ou cálculo dos predicados (ou funcional) de primeira ordem como um sistema axiomático (vale dizer, aquele sistema cuja base primitiva — isto é, alfabeto, regras de formação, regras de transformação e axiomas — é explicitamente enunciada em sua metalinguagem). E com isto tem início a tradição de conceber a lógica como o estudo desses dois cálculos: o cálculo proposicional e o cálculo dos predicados.

Em segundo lugar, a ele devemos uma importante teoria sobre a fundamentação da matemática, que será mais tarde denominada de 'logicismo'. De fato, desde jovem Frege já se encontrava penetrado pela atitude que caracterizará toda sua atividade intelectual: a busca dos elementos últimos e dos modos pelos quais estes se inter-relacionam no processo de reconstrução da aritmética. Esta orientação primordial explicaria seu desinteresse pela pesquisa em matemática enquanto tal, e mesmo, arriscaria dizer, seu interesse pela lógica apenas enquanto esta é um instrumento indispensável para seus propósitos de fundamentar a aritmética. Para a implementação de tal programa, cumpre descartar como imprestáveis seja a linguagem corrente, seja a lógica tradicional aristotélica, seja ainda a lógica algébrica de Boole (ou Schröder), ou seja, todos os instrumentos disponíveis em sua época. Com isso, a ele se impõe elaborar algo com o qual possa realizar um tal projeto. Seu ponto de partida consiste em construir um sistema formal cujas noções básicas sejam fixadas com exatidão e clareza, e a seguir sejam estabelecidos os enunciados primitivos e regras de inferências que tornam possíveis desenvolver sem quaisquer lacunas uma demonstração nesse sistema. Ele foi assim levado a desenvolver, pela primeira vez, um sistema formal a partir do qual é possível entender com exatidão não só o que vem a ser uma prova como também obter provas pela exclusiva utilização de regras formais aplicadas aos axiomas. Para tanto, ele parte não da noção de conceito, mas da noção de juízo, distinguindo juízo (*Urteil*) de conteúdo asserível (*beurteilbar Inhalt*), isto é, 'uma mera combinação de representações'. A seguir, ele estabelece quatro noções primitivas — a negação, a implicação, a quantificação universal e a igualdade —, de nove axiomas e enuncia as regras primitivas de inferência. Com isso, chega a soluções da mais alta originalidade e importância, como rejeitar a análise do juízo em sujeito e predicado em favor das noções de função e argumento, a associação do quantificador à variável para expressar a generalidade. Pôde assim, desenvolver axiomaticamente um cálculo proposicional e uma teoria da quantificação envolvendo um cálculo dos predicados de primeira e de segunda ordens e um esboço de uma teoria ingênua dos conjuntos. Foi também possível fixar a noção de sequência por meios estritamente lógicos, a noção de propriedade hereditária em uma sequência, sua célebre definição de ancestral de uma relação e ainda obter como teorema a indução matemática, um poderoso recurso de demonstração. Com os instrumentos por Frege introduzidos, a lógica pôde, pela primeira vez, manipular inferências que envolvem a igualdade e a quantificação múltipla e, com isso, se avizinhar ao extremo das questões de natureza fundacionais.

Em terceiro lugar, a ele devemos uma filosofia da linguagem mais abrangente e consistente que todas as até então conhecidas. Ao desenvolver sua semântica, ele se propõe a expor uma teoria de aplicabilidade ampla e irrestrita, em que a noção de conteúdo, tão utilizada, vem a ser decomposta em sentido e referência. Deste modo, toda expressão (palavra, frase ou sentença) expressa um sentido e designa um referente. O referente de uma expressão é aquilo que ela designa. Assim, os termos '2 + 2' e '6 − 2' se referem ou designam o mesmo referente, isto é, 4. De modo geral, uma sentença se refere ou designa seu valor de verdade, isto é, o verdadeiro ou o falso. O referente de uma sentença é determinado pelos referentes de seus componentes. Por outro lado, o sentido de uma expressão é o modo pelo qual essa expressão determina ou apresenta seu referente. Os dois termos acima têm o mesmo referente, mas o primeiro se refere ao número 4 de um modo (isto é, através de uma adição), enquanto que o segundo se refere a esse número de outro modo (isto é, mediante uma subtração). O modo de apresentar o referente é o que constitui, segundo Frege, o sentido de uma expressão, seja esta uma palavra isolada seja uma sentença completa. No caso particular das sentenças, seu sentido é o que ele denomina de 'pensamento'; e aqui ele distingue de maneira explícita a apreensão de um pensamento de seu reconhecimento como verdadeiro. Portanto, as variações semânticas no âmbito das expressões ocorrem ou no plano do sentido ou no plano do referente. Uma expressão, porém, pode ter sentido mas carecer de referente — v.g., 'O atual rei do Brasil'. Frege enuncia três importantes teses sobre as relações entre sentido e referência: 1) O sentido da expressão é o que determina seu referente; 2) Duas expressões de mesmo sentido designam o mesmo referente; e 3) Duas expressões correferentes (de mesma referência) podem não expressar o mesmo sentido. Mais tarde, ele virá a defender a tese segundo a qual a dicotomia sentido/referência se aplica não só aos termos singulares (ou nomes próprios), mas também aos termos gerais.

GOTTLOB FREGE

CONCEITOGRAFIA

Uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a da aritmética

Publicado pela primeira vez sob o título *Begriffsschrift: eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle: L. Nebert, 1879. Republicado recentemente em G. Frege, *Begriffsschrift und andere Ausfsätze*. Hrsg. I. Angelelli, Hildesheim: Olms, 1964.

PREFÁCIO

A apreensão de uma verdade científica passa, normalmente, por vários estágios de certeza. Com efeito, conjeturada inicialmente a partir de um número talvez insuficiente de casos particulares, uma proposição[1] geral torna-se mais e mais solidamente estabelecida ao se relacionar com outras verdades mediante cadeias de inferências — seja porque dela se derivam conclusões que são confirmadas por outros modos, seja, pelo contrário, por ela se afigurar uma conclusão de proposições já estabelecidas. Daí pode-se perguntar, de um lado, como podemos chegar gradualmente a uma certa proposição e, de outro, como podemos assegurar-lhe finalmente uma sólida fundamentação[2]. A primeira questão talvez seja respondida diferentemente por diferentes pessoas; a segunda, sendo mais determinada, tem sua resposta vinculada à estrutura interna da proposição considerada.

O método de prova (*Beweisführung*) mais seguro consiste, obviamente, em seguir estritamente a lógica, que abstraindo as características particulares das coisas, apoia-se exclusivamente nas leis sobre as quais se baseia todo o conhecimento. Por esta razão, dividimos todas as verdades que requerem prova em duas espécies: aquelas cuja prova pode ser conduzida por meios puramente lógicos e aquelas cuja prova se apoia em fatos empíricos[3]. Mas o fato de uma proposição ser da primeira espécie é plenamente compatível com o fato de ela jamais se tornar consciente em um espírito humano, caso não houvesse atividade sensorial[a]. Portanto, o que está na base desta divisão [das espécies de verdade] é não a gênese psicológica (*Entstehungsgeweise*), mas o melhor método de prova[4].

Entretanto, quando indago a qual destas duas espécies [de verdade] pertencem os juízos aritméticos, devo de início investigar até que ponto se procede em aritmética[5] apenas por meio de inferências [formais], pelo uso tão somente das leis do pensamento que transcendem a todas as particularidades[6]. A via que segui, no que tange a essa indagação, foi a seguinte: tentei reduzir o conceito de sucessão em uma sequência (*Anordnung in einer Reihe*) à noção de consequência lógica (*logische Folge*) para daí poder estabelecer o conceito de número. Para evitar que nessa tentativa se intrometesse inadvertidamente algo de intuitivo (*Anschauliches*), cabia tudo reduzir a uma cadeia inferencial (*Schlusskette*), carente de qualquer lacuna. Mas ao tentar realizar essa exigência da forma a mais rigorosa possível, deparei-me com o obstáculo da insuficiência da linguagem [corrente]: além de todas as dificuldades inerentes ao manuseio das expressões, à medida que as relações se tornavam mais complexas, tanto menos apto me encontrava para atingir a exatidão

[a] Posto que sem percepção sensorial é impossível qualquer desenvolvimento mental nos seres que conhecemos, segue-se que o que acabamos de dizer é válido para todos os juízos.

exigida. Tal dificuldade levou-me a conceber a presente conceitografia.

De imediato, esta deve servir para examinar, de modo o mais rigoroso, a exatidão de uma cadeia inferencial e ainda explicitar todo o pressuposto que possa nela se imiscuir inadvertidamente, de modo que este venha a ser, já em sua origem, investigado[7]. Eis porque renunciei a expressar tudo aquilo que fosse irrelevante para a sequência inferencial (*Schlussfolge*). Na §3 [da presente obra], chamei de conteúdo conceitual (*begrifflichen Inhalt*) aquilo que encerra o que julgo ser relevante [para o processo inferencial]. Esta explicação deve estar, portanto, sempre presente, caso se deseje entender corretamente a essência de minha linguagem formular (*Formelsprache*). Disto também se deriva o nome 'conceitografia' (*Begriffsschrift*)[8]. Já que me limitei, aqui, a expressar relações que independem das propriedades particulares das coisas, poderia também empregar a expressão 'linguagem formular do pensamento puro'. Contudo, quanto à [expressão] 'decalcada sobre a linguagem formular da aritmética', que utilizei no título [deste livro], vincula-se antes às ideias fundamentais do que às minúcias de execução [da conceitografia]. Todo esforço de instituir uma semelhança artificial [com a aritmética] pela caracterização do conceito como a soma de suas notas[9] esteve inteiramente fora de meus propósitos. O ponto de contato mais próximo entre minha linguagem formular e a [linguagem formular] da aritmética está no modo de utilizar as letras.

Creio que o melhor meio de elucidar a relação que se dá entre minha conceitografia e a linguagem corrente seria compará-la com a relação que ocorre entre o microscópio e o olho. Este último, pela extensão de sua aplicabilidade e pela versatilidade de sua adaptação às mais diversas circunstâncias, é muito superior ao microscópio. Contudo, como um instrumento ótico, o olho possui, por certo, muitos inconvenientes, que passam comumente desapercebidos por força de seu estreito relacionamento com a nossa vida mental. De fato, se um objetivo científico exigir grande acuidade de resolução, o olho se mostra insuficiente. Por outro lado, o microscópio se afigura perfeitamente adequado para tais fins, embora seja por isso mesmo inadequado para outros.

De modo similar, minha conceitografia foi concebida como um instrumento para servir a determinados fins científicos e não deve ser descartada pelo fato de não servir para outras finalidades. Se, de algum modo, ela servir a tais objetivos, torna-se irrelevante o fato de inexistir novas verdades em meu trabalho. Ficaria consolado com a convicção de que um desenvolvimento do método também faz progredir a ciência. Assim, Bacon pensava ser melhor inventar um meio pelo qual se pudesse descobrir facilmente algo, a descobrir algo de particular; e, com efeito, todos os grandes progressos científicos modernos tiveram sua origem num aperfeiçoamento do método.

Leibniz também reconheceu — e talvez mesmo superestimou — as vantagens de um modo de designação (*Bezeichnungweise*) adequado. Sua ideia (*Gedanke*) de uma característica universal, de um *calculus philosophicus* ou *ratiocinator*[b], era tão ambiciosa que a tentativa de realizá-la não poderia ultrapassar as meras preliminares[10]. O entusiasmo de que foi possuído seu idealizador — ao perceber o enorme incremento que traria ao poder intelectual da humanidade, um modo de designação adequado às próprias coisas (*die Sachen selbst*) — levou-o a subestimar os empecilhos inerentes a esse empreendimento. Mas, mesmo que um objetivo tão grandioso não possa ser alcançado num único intento, não se deve excluir a possibilidade de uma aproximação lenta e gradual. Quando um problema parece insolúvel em toda a sua generalidade, deve-se provisoriamente restringi-lo; pois talvez possa ser resolvido por ampliações graduais. Podemos pensar os símbolos da aritmética, da geometria, da química, como realizações, para domínios particulares, do projeto de Leibniz. A conceitografia aqui proposta é um outro acréscimo a esses domínios; mas,

[b] Sobre isto, veja-se Tredelenburg, *Historische Beiträge zur Philosophie*, v. 3 [1867, p. 1-47].

por certo, um domínio situado em uma posição central e limítrofe a todos eles. A partir daqui, portanto, abrem-se as mais amplas perspectivas de sucesso no sentido de preencher as lacunas das linguagens formulares existentes, no sentido de associar, sob uma única linguagem formular, domínios até então separados, e ainda no sentido de ampliá-la a ponto de incluir áreas que até então tinham escapado a essa linguagem[11].

Creio sobretudo que minha conceitografia seja ampliada com sucesso, onde tiver especial importância a exatidão de uma prova, como nos fundamentos do cálculo diferencial e do cálculo integral.

Parece-me ainda mais fácil estender o domínio [de aplicação] desta linguagem formular à geometria. Para tanto, basta acrescentar [à linguagem formular] mais alguns símbolos para as relações intuitivas que aí [na geometria] ocorrem. Deste modo, obter-se-ia uma espécie de *analysis situs*[12].

Daqui, pode-se efetuar a transição para a teoria do movimento puro[13], e depois para a mecânica e para a física. Nestes últimos domínios — em que além da necessidade racional (*Denknothwendigkeit*) se impõem a necessidade natural (*Naturnothwendigkeit*) —, é de se prever um maior desenvolvimento do modo de designação à medida que o conhecimento progrida. Isto, porém, não é uma razão para esperar até que pareça excluída a possibilidade de tais transformações.

Se uma das tarefas da filosofia for romper o domínio da palavra sobre o espírito humano, desvendando os enganos que surgem, quase que inevitavelmente, em decorrência de utilizar a linguagem corrente para expressar as relações entre os conceitos, ao liberar o pensamento dos acréscimos indesejáveis a ele associados pela natureza dos meios linguísticos de expressão, então minha conceitografia, desenvolvida sobretudo para esses propósitos, poderá ser um valioso instrumento para os filósofos. Por certo, ela também não reproduz as ideias de forma pura, já que isto não é possível quando as ideias são representadas por um meio [de expressão] exterior [à inteligência]. O que é possível, por um lado, é confinar tais discrepâncias [conceitográficas] ao inevitável e ao inofensivo e, por outro, por estas diferirem daquelas [discrepâncias] que são próprias da linguagem corrente, elas nos protegem da influência unilateral de um meio particular de expressão.

Parece-me que a mera descoberta desta conceitografia foi um fator de progresso para a lógica[14]. Espero que os lógicos, caso não se deixem intimidar por uma impressão inicial de estranheza, não neguem seu assentimento às inovações a que fui levado a realizar por uma necessidade inerente à própria questão. Os desvios de tradição se justificam pelo fato de a lógica ter seguido, até aqui, muito proximamente a linguagem e a gramática. Em particular, creio que a substituição dos conceitos de *sujeito* e *predicado* pelos de *argumento* e *função* resistirão ao tempo. É fácil perceber como o fato de considerar um conteúdo como função de um argumento leva à formação de conceitos[15]. Mais ainda, a análise de como se correlacionam entre si os significados das palavras: *se*, *e*, *não*, *ou*, *existe*, *alguns*, *todos*, etc., mereceu toda a atenção.

Em particular, diremos ainda o seguinte. Aqui, nos restringimos a um único modo de inferência, exposto na §6, isto se justifica pelo fato de entendermos que, ao se lançar a *fundação* desta conceitografia, os componentes últimos devem ser tão simples quanto possível, se a clareza e a ordem devem prevalecer. Isto não exclui que, *posteriormente*, certas transições de vários juízos para um novo juízo — transições que por este único modo de inferência[16] só são possíveis de maneira indireta — sejam transformadas em transições diretas pela utilização de abreviações. Com efeito, é isto mesmo que se recomenda em uma aplicação posterior. E pela utilização desse processo serão introduzidos novos modos de inferência.

Já observei que as fórmulas (31) e (41) podem ser reduzidas a uma única fórmula

$$\vdash (\neg\neg\, a \equiv a)$$

com a qual são possíveis outras simplificações[17].

Como disse no início, a aritmética foi o ponto de partida do processo intelectual que me conduziu a minha conceitografia. A esta ciência, portanto, pensei aplicá-la de início, procurando analisar mais detidamente seus conceitos e fundamentar de modo mais aprofundado suas proposições. Por enquanto, no terceiro capítulo [da *Conceitografia*], desenvolvo algo que aponta para essa direção. O prosseguimento da rota indicada — a elucidação dos conceitos de número, grandeza, etc. — será objeto de outras investigações que virão a lume após este livro[18].

Jena, 18 de dezembro de 1878.

SUMÁRIO

I. Definição dos Símbolos

Juízo

Condicionalidade

Negação

Identidade de Conteúdo

Função

Generalidade

II. Representação e Derivação de alguns Juízos do Pensamento Puro

III. Tópicos de Teoria Geral das sequências

I. DEFINIÇÃO DOS SÍMBOLOS

§1. Na teoria das grandezas, os sinais habitualmente empregados são de dois gêneros[19]. O primeiro consiste de letras que representam ou um número que se deixa indeterminado ou uma função que se deixa indeterminada. Esta indeterminação torna possível a utilização de letras para expressar a validade universal de proposições, como

$$(a+b)c = ac + bc.$$

O segundo gênero consiste de sinais que têm um significado particular, como $+, -, \sqrt{}, 0, 1, 2$.

Adoto esta ideia básica de distinguir dois gêneros de sinais, que infelizmente não é rigorosamente observada na teoria das grandezas[a], *a fim de utilizá-la no domínio mais amplo do pensamento puro em geral*[20]. Portanto, divido todos os sinais que utilizo em *sinais com os quais se pode representar uma multiplicidade de coisas e sinais que têm um sentido totalmente determinado*. Os primeiros são as *letras* e servirão sobretudo para, não obstante sua indeterminação, expressar a *generalidade*. Mas devo insistir em que uma letra [em nosso sistema notacional] *retém*, no mesmo contexto, o significado que lhe foi dado.

Juízo

§2. Um juízo[21] sempre será expresso por meio do sinal

$$\vdash$$

que se coloca à esquerda dos sinais, ou combinações de sinais, que indicam conteúdo de juízo. Caso se *omita* o pequeno traço vertical que se encontra à esquerda do horizontal, o juízo se transforma em uma *mera combinação de ideias* (*blosse Vorstellungsverbindung*), combinação esta que não expressa se aquele que a escreveu a reconhece ou não como verdadeira[22]. Por exemplo, façamos com que

$$\vdash A$$

signifique o juízo "polos magnéticos opostos se atraem"[b], então

$$— A$$

exprimirá não este juízo, mas apenas produzirá no leitor a ideia da atração recíproca de polos magnéticos opostos, a fim de tirar disto, digamos, algumas conclusões e, por meio destas, testar a correção do pensamento. [Quando o traço vertical é omitido], *parafraseamos* este fato mediante as palavras "*a circunstância de que*" ou "*a proposição que*".

Nem todo conteúdo pode tornar-se um juízo, mesmo quando $\vdash$ antecede a seu sinal; a ideia de "casa", por exemplo, não se torna. Por esta razão, distinguimos entre conteúdos *asseríveis* e *não-asseríveis* (*beurtheilbare und um beurtheilbare Inhalte*)[c].

[a] Pense-se em 1, log, sen, lim.

[b] Emprego letras gregas maiúsculas como abreviações, as quais o leitor poderá associar um sentido adequado, se não forem especialmente explicadas.

[c] Por outro lado, a circunstância de que existem casas, ou de que existe uma casa, seria um conteúdo asserível (cf. §12). Mas, a ideia "casa" seria apenas uma parte de tal conteúdo. Na proposição "A casa de Príamo era de madeira" não se poderia substituir "casa" por "circunstância de que existe uma casa". Um exemplo de outro gênero de conteúdo não asserível encontra-se na fórmula 81.

O *traço horizontal*, a partir do qual se forma o sinal $\vdash$, *combina os sinais que o seguem em uma totalidade; e a esta totalidade se refere a asserção expressa pelo traço vertical à esquerda do horizontal*. Chama-se o traço horizontal de *traço de conteúdo* e o traço vertical de *traço de juízo*. O traço de conteúdo serve também para relacionar qualquer sinal à totalidade de sinais que segue o traço. *O que quer que siga o traço de conteúdo, deve sempre ser um conteúdo asserível*[23].

§3. Segundo minha maneira de representar um juízo, *não há lugar* para a distinção entre *sujeito* e *predicado*. Para justificar isto, observo que os conteúdos de dois juízos podem diferir de dois modos: primeiro, pode-se dar que [todas] as consequências deriváveis do primeiro juízo, quando este é combinado com outros juízos determinados, também possam sempre ser derivados do segundo juízo, quando combinado com estes mesmos juízos; segundo, pode-se dar que não seja este o caso. As duas proposições: "Em Plateia, os gregos derrotaram os persas" e "Em Plateia, os persas foram derrotados pelos gregos", diferem quanto ao primeiro modo. Mesmo que se pudesse reconhecer uma ligeira diferença quanto ao sentido, a concordância ainda assim prevalece.

A parte do conteúdo que é a *mesma* em ambas [as proposições], chamo de *conteúdo conceitual*[24]. Já que só este tem significado para a conceitografia, não preciso introduzir qualquer distinção entre proposições que tenham o mesmo conteúdo conceitual. Caso se diga: "Sujeito é o conceito de que trata o juízo", isto se aplica também ao objeto. Por esta razão, pode-se dizer apenas: "Sujeito é o conceito de que trata especialmente o juízo". Em linguagem corrente, a posição do sujeito na sequência das palavras tem o significado de um lugar *especial*, onde se coloca aquilo sobre o qual se deseja a atenção do ouvinte. (Ver também §9). Isto, por exemplo, pode ter o propósito de indicar a relação deste juízo com outros e, assim, facilitar ao ouvinte a apreensão de todo o contexto. Deste modo, todos os fenômenos (*Erscheinungen*) da linguagem [corrente] que resultam apenas da interação do locutor com o ouvinte — por exemplo, quando o locutor leva em conta as expectativas do ouvinte antes mesmo de pronunciar a sentença [completa] e tenta pô-las no caminho certo — não têm qualquer correspondente em minha linguagem formular, já que nesta só se considera em um juízo o que influir em suas *possíveis consequências*. Será expresso de maneira explícita, tudo aquilo que for necessário para a correção da inferência; mas o que não for necessário, em geral, não será indicado; *nada se deixará para conjecturas*. Também sigo fielmente o exemplo da linguagem formular da matemática, em que só de maneira forçada se pode distinguir sujeito de predicado. Pode-se imaginar uma linguagem em que a proposição "Arquimedes morreu na conquista de Siracusa", seria expressa do seguinte modo: "A morte violenta de Arquimedes na conquista de Siracusa é um fato". Com efeito, aqui também se pode, caso assim se deseje, distinguir sujeito de predicado; mas aqui o sujeito encerra o conteúdo total e o predicado serve apenas para transformar este conteúdo num juízo. *Tal linguagem teria apenas um único predicado para todos os juízos, a saber, "é um fato"*[25]. Assim sendo, vê-se que não se pode falar de um sentido corrente de sujeito e predicado. *Nossa conceitografia é uma linguagem deste tipo, onde o sinal* $\vdash$ *é o predicado comum a todos os juízos*.

Em meu primeiro esboço de uma linguagem formular, deixei-me levar pelo exemplo da linguagem [corrente], formando os juízos com sujeito e predicado. Mas logo me convenci de que isto era um obstáculo a meu objetivo e que apenas me conduzia a inúteis prolixidades.

§4. As observações que se seguem visam a explicar o significado das distinções que, para nossos propósitos, devem ser feitas sobre os juízos.

Distinguem-se os juízos em *universais* e *particulares*: isto não é propriamente uma distinção entre juízos, mas uma distinção entre conteúdos. *Dever-se-ia dizer*: *"um juízo com um conteúdo* *universal*", "*um juízo com um conteúdo particular*". Estas propriedades dizem respeito ao conteúdo, mesmo quando este não é tido como juízo, mas como uma proposição[26] [não-asserida]. (Ver §2).

O mesmo vale para a negação. Numa prova indireta, por exemplo, se diz: "suponha-se que os segmentos AB e CD não fossem iguais". Aqui, o conteúdo, que os segmentos AB e CD não sejam iguais, contém uma negação; mas este conteúdo, embora possa ser um juízo, não é apresentado como um juízo. A negação, portanto, incide sobre o conteúdo, quer este conteúdo se apresente ou não como um juízo. Por esta razão, acho mais apropriado considerar a negação como uma nota (*Merkmal*) de um *conteúdo asserível*[27].

Parece-me que a distinção dos juízos em categóricos, hipotéticos e disjuntos só tem significado gramatical[d].

O juízo apodítico difere do assertórico pelo fato de [o juízo apodítico] sugerir a existência de juízos universais a partir dos quais se pode inferir a proposição, enquanto que o juízo assertórico carece de tal propriedade. Ao dizer que uma proposição é necessária, sugiro com isto algo sobre os fundamentos do juízo (*Urtheilsgründe*). *Mas, já que isto não afeta o conteúdo conceitual do juízo, a forma apodítica do juízo* (*die Form des apodiktischen Urtheils*) *não tem para nós qualquer importância*[28].

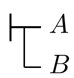
Quando uma proposição é apresentada como possível, então o locutor está ou suspendendo o juízo, assim indicando desconhecer qualquer lei a partir da qual poderia inferir a negação [de tal proposição]; ou então está dizendo que a negação universal da proposição é falsa. No último caso, temos o que é usualmente chamado de um *juízo particular afirmativo*[e]. "É possível que um dia a Terra colida com outro corpo celeste" é um exemplo do primeiro caso, enquanto que "Um resfriado pode resultar em morte" é um exemplo do segundo.

Condicionalidade

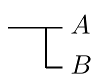
§5. Se A e B[29] significam conteúdos asseríveis[f], então surgem as seguintes quatro possibilidades[30]:

1. A é afirmado e B é afirmado,
2. A é afirmado e B é negado,
3. A é negado e B é afirmado,
4. A é negado e B é negado.

Agora,



significa o juízo de que *a terceira dessas possibilidades não ocorre, mas as outras três sim*[31]. Consequentemente, se



[d] A explicação se encontra no decorrer de todo o livro.
[e] Ver §12.
[f] §2.

for negado, então isto significa que a terceira possibilidade ocorre e, portanto, que A é negado e B é afirmado. Dos casos em que

$$\begin{array}{l}\rule{1.5em}{0.4pt}\!\top A\\ \hphantom{\rule{1.5em}{0.4pt}}\llcorner B\end{array}$$

é afirmado, temos o seguinte a dizer:

1) A deve ser afirmado; logo, o conteúdo de B é totalmente irrelevante. Por exemplo, façamos que $\vdash A$ signifique $3 \times 7 = 21$ e que B signifique a circunstância de que o sol brilha. Neste caso, apenas os dois primeiros, dos quatro mencionados, são possíveis. Não precisa existir uma conexão causal entre os dois conteúdos.

2) B tem que ser negado; logo, o conteúdo de A é irrelevante. Por exemplo, façamos que B signifique a circunstância de que o movimento perpétuo é possível e A a circunstância de que o universo é infinito. Neste caso, só o segundo e o quarto, dos quatro casos, são possíveis. Não precisa existir uma conexão causal entre A e B.

3) Pode-se proferir o juízo

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top A\\ \hphantom{\vdash}\llcorner B\end{array}$$

sem que se saiba se A e B devem ser afirmados ou negados. Por exemplo, façamos que B signifique a circunstância de que a lua está em quadratura [como sol] e façamos que A signifique a circunstância de que a lua parece um semicírculo. Neste caso, podemos traduzir

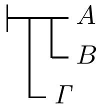
$$\begin{array}{l}\vdash\!\top A\\ \hphantom{\vdash}\llcorner B\end{array}$$

com o auxílio da conjunção "se": "se a lua está em quadratura [com o sol], então ela parece um semicírculo". A conexão causal implícita na palavra "se" não é, contudo, expressa por meio de nossos sinais, embora um juízo deste gênero só possa ser proferido tendo por base uma tal conexão. Pois, esta conexão [causal] é algo geral; mas aqui ainda não dispomos de uma expressão para [representar] a generalidade (ver §12)[32].

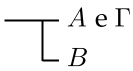
Chama-se *traço de condição* o traço vertical que liga os dois traços horizontais. A parte do traço horizontal superior localizado à esquerda do traço de condição é o traço de conteúdo, cujo significado já fora acima explicado, da seguinte combinação de sinais:

$$\begin{array}{l}\rule{1.5em}{0.4pt}\!\top A\\ \hphantom{\rule{1.5em}{0.4pt}}\llcorner B;\end{array}$$

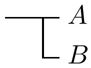
A este é anexado todo sinal que pretenda se relacionar com o conteúdo total da expressão. A parte do traço horizontal situado entre A e o traço de condição é o traço de conteúdo de A. O traço horizontal à esquerda de B é o traço de conteúdo de B. Consequentemente, é fácil ver que



nega o caso em que A é negado enquanto B e Γ são afirmados. Deve-se pensar esta [fórmula] como constituída de



assim como

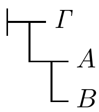


é constituído de A e de B. Por esta razão, temos, em primeiro lugar, a negação do caso onde

é negado e Γ afirmado. Mas, a negação de

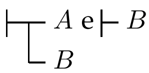
significa que A é negado e B é afirmado. A partir disso, obtém-se o que acima foi dado. Caso se dê uma conexão causal, então também se pode dizer que “A é a consequência necessária de B e de Γ” ou “se ocorrem as circunstâncias B e Γ, então a circunstância A também ocorre”.

Não é menos fácil reconhecer que



nega o caso em que B é afirmado, mas A e Γ são negados[33]. Caso se pressuponha uma conexão causal entre A e B, então pode-se traduzir [a expressão acima nos seguintes termos]: “se A for uma consequência necessária de B, então pode-se inferir que Γ ocorre”.

§6. Da definição dada na §5, segue-se que a partir dos dois juízos



resulta um novo juízo

$$\vdash A.$$

Dos quatro casos acima enumerados, o terceiro está excluído por

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!- A\\ \quad\llcorner\!- B;\end{array}$$

mas o segundo e o quarto são excluídos por

$$\vdash B,$$

de modo que só o primeiro caso permanece[34]. Poder-se-ia eventualmente escrever esta inferência da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!- A\\ \quad\llcorner\!- B\end{array}\\ \vdash B\\ \hline \vdash A\end{array}$$

Isto tornar-se-ia complicado, se extensas expressões estivessem no lugar de A e B, porque cada uma teria de ser escrita duas vezes. Por isto, emprego a seguinte abreviação: no contexto de uma prova, cada juízo que ocorra será designado por um número que ficará à direita deste juízo, quando este ocorrer pela primeira vez[35]. A título de exemplo, suponhamos que o juízo

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!- A\\ \quad\llcorner\!- B\end{array}$$

ou um [juízo] que encerre $\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!- A\\ \quad\llcorner\!- B\end{array}$ como um caso particular, seja designado por X. Neste caso, escrevo a inferência da seguinte maneira:

$$(\mathrm{X}):\ \frac{\vdash B}{\vdash A}$$

Aqui é deixado para o leitor a tarefa de construir o juízo

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!- A\\ \quad\llcorner\!- B\end{array}$$

a partir de $\vdash B$ e $\vdash A$ e verificar se tal juízo está de acordo com o juízo X acima mencionado.

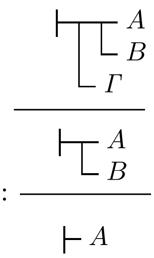
Se, por exemplo, o juízo $\vdash B$ for designado por XX, então escreverei a mesma inferência da seguinte maneira:

$$(\mathrm{XX})::\ \frac{\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!- A\\ \quad\llcorner\!- B\end{array}}{\vdash A}$$

Aqui, o duplo dois pontos indica que $\vdash B$, mencionado apenas por meio de XX, deve ser formado a partir dos dois juízos assinalados, de uma maneira distinta da anteriormente mencionada.

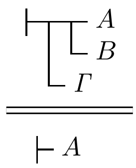
Mais ainda, se o juízo $\vdash \varGamma$, digamos, fosse designado pelo [número] XXX, então os dois juízos poderiam ser abreviados da seguinte maneira:

(XXX)::
(XX)::

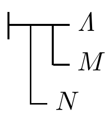


ou então de modo ainda mais sucinto:

(XX,XXX)::



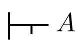
Em lógica, a partir de Aristóteles, podemos enumerar toda uma série de modos de inferência; eu me sirvo tão somente de um, pelo menos nos casos em que um novo juízo é derivado de mais de um juízo. A verdade contida implicitamente em outro modo de inferência pode ser evidentemente expressa em um juízo da forma: se M for válido e se N for válido, então Λ também será válido. Mediante sinais:



A partir deste juízo e de $\vdash N$ e $\vdash M$, segue-se então $\vdash \Lambda$, como vimos acima. Deste modo, uma inferência realizada com o auxílio de qualquer modo de inferência pode ser reduzida a este caso. Já que é possível prosseguir com apenas um único modo de inferência, então é esclarecedor fazê-lo assim. Se assim não fosse, não haveria nenhuma razão para nos limitar aos modos aristotélicos de inferência, pois sempre se poderia acrescentar indefinidamente outros modos: um modo diferente de inferência poderia ser feito de cada um dos juízos expressos pelas fórmulas das §§ 12 a 22. *Com esta limitação a um único modo de inferência não pretendo, contudo, de modo algum expressar uma proposição psicológica; mas apenas resolver uma questão de forma* [Formfrage] *da maneira mais conveniente*. Alguns dos juízos que substituem os modos aristotélicos de inferência serão apresentados na §22, mediante as fórmulas 59, 62 e 65[36].

Negação

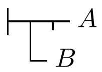
§7. Se um pequeno traço vertical for anexado à parte inferior do traço de conteúdo, isto expressará a circunstância que o *conteúdo não se dá*. Assim,



significa que "A não se dá". Chamo a esse pequeno traço vertical de *traço de negação*. A parte do traço horizontal que está à direita do traço de negação é o traço de conteúdo de A; e a parte do traço horizontal que está à esquerda do traço de negação é o traço de conteúdo da negação de A. Sem o traço de juízo não se faz, aqui ou em qualquer outro lugar da conceitografia, nenhum juízo.

é uma mera sugestão para formar a ideia de que A não se dá, sem contudo expressar se esta ideia é verdadeira.

Consideremos agora alguns casos em que os sinais de condicionalidade e de negação são combinados.



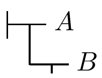
significa: "o caso em que B deve ser afirmado e a negação de A deve ser negada não se dá". Em outras palavras, "a possibilidade de afirmar simultaneamente A e B não existe" ou "A e B se excluem reciprocamente"[37]. Deste modo, apenas os três casos seguintes permanecem:

A é afirmado e B é negado;

A é negado e B é afirmado;

A é negado e B é negado.

Em vista do precedente, é fácil indicar o significado de cada uma das três partes do traço horizontal situado à esquerda de A.



significa : "o caso em que A é negado e a negação de B é afirmada não se dá" ou "A e B não podem ser simultaneamente negados"[38]. Apenas as seguintes possibilidades permanecem:

A é afirmado e B é afirmado;

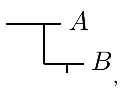
A é afirmado e B é negado;

A é negado e B é afirmado.

A e B conjuntamente exaurem todas as possibilidades. As palavras "ou" e "ou ... ou" são usadas de dois modos[39]. Em primeiro lugar,

"A ou B"

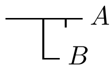
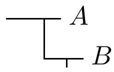
significa o mesmo que



vale dizer, que fora de A e B nada é concebível. Por exemplo, se uma massa gasosa for aquecida, então seu volume ou sua pressão aumentam. Em segundo lugar, a expressão

"A ou B"

combina em si os significados de

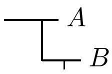
 e 

de modo que, em primeiro lugar, fora de A e B não existe uma terceira possibilidade; e que, em segundo lugar, A e B se excluem mutuamente. Das quatro possibilidades, apenas as duas seguintes permanecem:

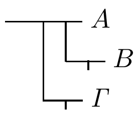
A é afirmado e B é negado;

A é negado e B é afirmado.

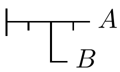
Dos dois modos de usar a expressão “A ou B”, o primeiro, em que a coexistência de A com B não é excluída, é o mais importante e aqui *usaremos a palavra “ou” neste significado*. Talvez seja apropriado distinguir “ou” de “ou ... ou”, estipulando que apenas este último apresente o significado secundário de exclusão mútua. Podemos então traduzir:



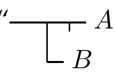
por “A ou B”. Do mesmo modo,



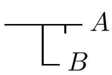
tem o significado de “A ou B ou Γ”.



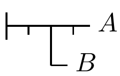
significa:

“

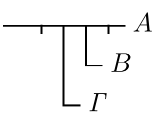
é negado” ou “o caso em que simultaneamente A e B são afirmados ocorre”. Por outro lado, as três possibilidades facultadas por

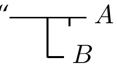
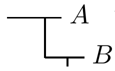


são excluídas. Consequentemente,

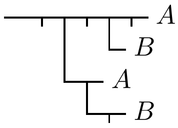


pode ser traduzida: “ambas, A e B, são fatos”. Também é fácil ver que

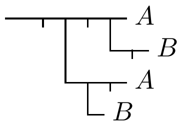


pode ser traduzido por "A e B e Γ". Caso se queira representar por sinais "ou A ou B" com o significado secundário de exclusão mútua, então temos que expressar " e ".

Disto resulta[40]



ou

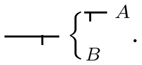


Em lugar de expressar, como aqui se faz, o "e" por meio dos sinais de condicionalidade e de negação, poder-se-ia também, ao inverso, representar a condicionalidade por meio de um sinal para "e" e um sinal para a negação[41]. Poder-se-ia introduzir, digamos,

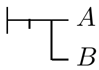
$$\begin{cases}\Gamma \\ \Delta\end{cases}$$

como sinal para o conteúdo total de Γ e Δ, e assim representar

mediante



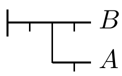
Escolhi o outro modo [isto é, o sinal para condicionalidade] porque me parece que ele possibilita de maneira mais simples expressar a inferência. A distinção entre "e" e "mas" é de um tipo que não pode ser expressa nesta conceitografia. O locutor emprega "mas" quando quer sugerir que aquilo que se segue é diferente daquilo que se poderia a princípio supor.



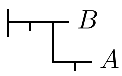
significa: "ocorre a terceira das quatro possibilidades, isto é, que A é negado e B é afirmado". Poder-se-ia traduzi-la portanto por:

"B e (mas) não A ocorre".

Pode-se traduzir a combinação de sinais



do mesmo modo.



significa: "o caso em que simultaneamente A e B são negados ocorre". Portanto, pode-se traduzir [a expressão acima]:

"Nem A nem B é um fato".

O que se disse sobre as palavras "ou", "e" e "nem ... nem" só é pertinente à medida que elas unem conteúdos *asseríveis*.

Identidade de conteúdo

§8. A identidade de conteúdo[42] difere da condicionalidade e da negação à medida que ela relaciona nomes e não conteúdos. Além disso, embora os sinais sejam usualmente meros representantes de seus conteúdos, de modo que toda combinação em que eles ocorram expresse apenas uma relação entre seus conteúdos, de imediato eles [sinais] se mostram a si mesmos quando se combinam por meio do sinal de identidade de conteúdo; pois é desta maneira que é designada a circunstância de que os dois nomes têm o mesmo conteúdo. Consequentemente, a introdução de um sinal de identidade de conteúdo necessariamente produz uma dicotomização no significado de todos os sinais, já que o mesmo sinal por vezes representa seu conteúdo e, por vezes, a si mesmo. A princípio, isto dá a impressão de que se está lidando com algo que concerne apenas *à expressão e não ao pensamento*, e de que não necessitamos absolutamente de diferentes sinais para o mesmo conteúdo e, assim, de que tampouco se carece de um sinal de identidade de conteúdo. Para mostrar quanto há de errôneo nessa impressão, tomo o seguinte exemplo da geometria[43]. Sobre a circunferência de um círculo, existe um ponto fixo A em torno do qual gira uma linha reta. Quando esta linha reta forma um diâmetro [do círculo], chamamos o extremo oposto do ponto A de ponto B, que corresponde a esta posição [da reta]. A seguir, denominaremos B o ponto de interseção das duas linhas [isto é, a interseção da circunferência com a reta] correspondente à posição da linha reta em cada instante de tempo. Este ponto B segue a regra segundo a qual à variações contínuas na posição da linha reta, devem sempre corresponder variações contínuas da posição de B. Em consequência, o nome B significa algo indeterminado à medida que não se especifique a posição correspondente da linha reta. Pode-se agora perguntar: a que ponto corresponde a posição da linha reta, quando esta for perpendicular ao diâmetro? A resposta será: ao ponto A. Neste caso, portanto, o nome B tem o mesmo conteúdo que o nome A; e, não obstante, não poderíamos usar, de antemão, um único nome, pois a justificação para assim proceder é dada inicialmente pela resposta [acima]. O mesmo ponto é determinado de duas maneiras:

1) diretamente, pela intuição,

2) como o ponto B que corresponde à linha reta perpendicular ao diâmetro.

A cada um destes dois modos de determinação (*Bestimmungsweisen*) corresponde um nome particular. Portanto, a necessidade de um sinal para a identidade de conteúdo baseia-se na seguinte consideração: um mesmo conteúdo pode ser plenamente determinado de modos diferentes; mas o fato de que de, em um caso particular, *a mesma* [coisa] seja efetivamente dada por meio de *dois modos de determinação*, é o conteúdo de um *juízo*. Antes que esse [juízo] possa ser feito, dois nomes distintos, correspondentes aos dois modos de determinação [do conteúdo], devem ser assinalados àquilo a que esses modos determinaram. Mas para expressar um tal juízo, precisamos de um sinal de identidade de conteúdo que ligue estes dois nomes. Disso se segue que nomes diferentes para o mesmo conteúdo nem sempre são uma mera questão irrelevante de forma; pelo contrário, eles atingem a própria essência da coisa, quando se eles estão associados a modos diferentes de determinação [do conteúdo]. Neste caso, o juízo que tem por objeto a identidade de conteúdo é sintético, no sentido kantiano. Uma razão mais corriqueira para a introdução de um sinal de identidade de conteúdo é que, às vezes, é conveniente introduzir, em lugar de uma expressão muito longa, uma abreviação. Quando isso se dá, temos que expressar a identidade de conteúdo entre a abreviação e a forma original. Façamos que

$$\vdash (A \equiv B)$$

signifique: *o sinal A e o sinal B têm o mesmo conteúdo conceitual, de modo que, em qualquer caso, sempre se pode substituir A por B, e reciprocamente.*

Função

§9. Suponhamos que a circunstância de ser o hidrogênio mais leve que o dióxido de carbono possa ser expressa em nossa linguagem formular; podemos então substituir o símbolo do hidrogênio pelo símbolo do oxigênio ou pelo do nitrogênio. Assim fazendo, o sentido de tal modo se altera que "oxigênio" ou "nitrogênio" entram na mesma relação em que antes estava "hidrogênio". Ao pensar uma expressão como variável, do modo acima indicado, ela pode ser decomposta, de um lado, em um componente estável que representa a totalidade das relações e, de outro, em um sinal que pode ser considerado como substituível por outros [sinais] e que representa o objeto presente nesta relação. O primeiro componente denomino de função e, o segundo, de seu argumento. Tal distinção nada tem a ver com conteúdo conceitual, pelo contrário, ela é apenas uma questão de ponto de vista[44]. Embora de acordo com a concepção anterior, "hidrogênio" fosse o argumento e "ser mais leve que o dióxido de carbono" fosse a função, poderíamos também conceber o mesmo conteúdo conceitual de modo que "dióxido de carbono" seria o argumento e "ser mais pesado que o hidrogênio" seria a função. Neste caso, precisaríamos apenas considerar "dióxido de carbono" como substituível por outras ideias como "ácido clorídrico" ou "amônia".

"A circunstância de que o dióxido de carbono é mais pesado que o hidrogênio"

e

"A circunstância de que o dióxido de carbono é mais pesado que o oxigênio"

são a mesma função com diferentes argumentos, caso se considere "hidrogênio" e "oxigênio" como argumentos; por outro lado, são funções diferentes de mesmo argumento, caso se considere "dióxido de carbono" como argumento.

Considere-se agora um outro exemplo, tome-se "a circunstância de que o centro de massa do sistema solar não tem aceleração, no caso de que só forças internas atuem sobre o sistema solar". Aqui, "sistema solar" ocorre duas vezes. Assim posto, isto pode ser considerado de várias maneiras como uma função do argumento "sistema solar". Com efeito, podemos pensar "sistema solar" como substituível por outros [argumentos], na primeira ou na segunda ou em ambas as ocorrências — no último caso, porém, sendo ambas as ocorrências de "sistema solar" substituídas pela mesma coisa. Estas três funções são totalmente distintas. A proposição que Catão matou Catão mostra a mesma coisa. Se aqui pensarmos "Catão" como substituível na primeira ocorrência, então "matar Catão" é a função; se pensarmos "Catão" como substituível na segunda ocorrência, então "ser morto por Catão" é a função; se pensarmos finalmente "Catão" como substituível em ambas as ocorrências, então "matar a si próprio" é a função.

Expressemos agora de forma geral a questão:

Se, em uma expressão, cujo conteúdo não precisa ser asserível, um sinal simples ou composto ocorre em um ou mais lugares, e se o pensarmos como substituível por outro [sinal], *mas sempre substituível pela* *mesma expressão em todos ou em algum desses lugares, então chamamos de função a parte invariante da expressão e chamamos de argumento a parte substituível*.

Já que algo pode ocorrer como argumento e ao mesmo tempo também pode ocorrer em alguns lugares da função onde ele não é tomado como substituível, então distinguimos em uma função os lugares de argumento de todos os demais lugares.

Aqui, deve-se atentar contra uma ilusão facilmente ocasionada pelo uso da linguagem [corrente]. Se compararmos as duas proposições:

"O número 20 é representável pela soma de quatro quadrados"

e

"Todo número inteiro positivo é representável pela soma de quatro quadrados"

então parece possível considerar como uma função "ser representável pela soma de quatro quadrados", como uma função cujo argumento é, em um caso, "o número 20" e, em outro, "todo número inteiro positivo". O erro desta concepção é reconhecido ao se observar que "o número 20" e "todo número inteiro positivo" não são conceitos de mesma ordem (*gleichen Ranges*). O que se pode atribuir ao número 20, não se pode atribuir, no mesmo sentido, a "todo número inteiro positivo", embora haja circunstâncias em que se possa atribuir a todo número inteiro positivo. A expressão "todo número inteiro positivo", por si mesma, não propicia — diferentemente da [expressão] "o número 20" — uma ideia independente; pelo contrário, ela só adquire um sentido no contexto de uma proposição (*Satz*).

Para nós, é irrelevante o fato de existir diversas maneiras pelas quais o mesmo conteúdo conceitual pode ser considerado como uma função deste ou daquele argumento, contanto que função e argumento sejam plenamente determinados. Mas, caso o argumento for *indeterminado*, como no juízo "podemos tomar como argumento de 'ser representável pela soma de quatro quadrados' um número inteiro positivo qualquer, pois a proposição [que disto resulta] sempre será verdadeira", então a distinção entre função e argumento adquire um significado *conteudístico* (*inhaltlich*). Pelo contrário, pode-se dar também que o argumento seja determinado, mas a função seja indeterminada. Em ambos os casos, através da oposição entre o *determinado* e o *indeterminado* ou entre o *mais* ou *menos* determinado, o todo se decompõe em função e argumento, segundo seu conteúdo e não segundo o nosso modo de concebê-lo.

Se, *numa função, entendemos que um sinal*[g]*, até então considerado insubstituível, é substituível em um ou em todos os lugares em que ocorre, então obtemos, por força desta consideração, uma função que tem um novo argumento além daquele que tinha anteriormente*. Por este meio, *surgem as funções de dois ou mais argumentos*. Assim, por exemplo, "a circunstância de que o hidrogênio é mais leve que o dióxido de carbono" pode ser considerada como uma função de dois argumentos "hidrogênio" e "dióxido de carbono".

Na mente do locutor, o sujeito [da proposição] é habitualmente o argumento principal; a seguir em importância é frequente se tomar o objeto. A linguagem [corrente], podendo escolher entre formas ou entre palavras, como

ativo – passivo
mais pesado – mais leve
dar – receber

[g] Um sinal anteriormente concebido como substituível [em algumas posições] pode ser agora tido como substituível também naquelas posições em que até então ele era tido como constante.

é livre para permitir que apareça, segundo sua própria disposição, este ou aquele componente da proposição como o argumento principal, mas esta liberdade é limitada pela escassez de palavras.

§10. *Para expressar uma função indeterminada de argumento A, basta encerrar A entre parênteses e prefixar esta expressão por uma letra.* Por exemplo:

$$\Phi(A).$$

Do mesmo modo,

$$\Psi(A, B)$$

significa uma função de dois argumentos A e B, também não determinada. Aqui, os lugares de A e B nos parênteses representam os lugares ocupados por A e B na função, independentemente de se A ou B ocupam um ou mais lugares [na função]. *Assim,*

$$\Psi(A, B) \textit{ e } \Psi(B, A)$$

são, em geral, diferentes. Funções indeterminadas de [vários] argumentos são expressas de um modo similar.

Pode-se ler

$$\vdash \Phi(A)$$

como: "A tem a propriedade Φ". Pode-se traduzir

$$\vdash \Psi(A, B)$$

por "B está na relação Ψ com A" ou "B é o resultado de uma aplicação do procedimento Ψ ao objeto A".

Já que na expressão

$$\Phi(A)$$

o sinal Φ ocorre em um dado lugar e já que podemos concebê-lo como substituível por sinais como Ψ e X — que expressariam então outras funções de argumento A —, *pode-se assim considerar $\Phi(A)$ como uma função do argumento Φ.* Isto mostra claramente que o conceito de função em Análise, pelo qual de modo geral me orientei, é muito mais restrito do que o conceito de função aqui desenvolvido.

Generalidade

§11. Na expressão de um juízo, pode-se sempre considerar a combinação de sinais à direita de $\vdash$ como função de um dos sinais que ocorrem [nessa combinação]. *Se substituirmos este argumento por uma letra gótica e se introduzirmos no traço de conteúdo uma concavidade que encerre esta mesma letra gótica, como em*

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \Phi(\mathfrak{a}),$$

então isto significa o juízo que esta função é um fato, o quer que se tome como seu argumento[45]. Já que uma letra usada como sinal funcional, tal como Φ em $\Phi(A)$, pode ser considerada como argumento de uma função, então ela pode ser substituída por uma letra gótica, da maneira como foi acima indicada. O significado da letra gótica está sujeito apenas às restrições óbvias seguintes: de que a asseribilidade (§2) de uma combinação de sinais que se segue ao traço de conteúdo deve permanecer inalterada e de que se a letra gótica ocorre como um sinal funcional, esta circunstância tem que ser levada em conta. *Têm de ser incorporadas ao juízo, todas as outras condições que devem incidir sobre aquilo que pode substituir uma letra gótica*. De tal juízo, portanto, sempre se pode deduzir um número arbitrário de *juízos de menor conteúdo geral*, pela substituição das letras góticas, em cada caso, por algo de diferente; quando isto é feito, desaparece novamente a concavidade do traço de conteúdo.

O traço horizontal à esquerda da concavidade em

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$$

é o traço de conteúdo para o qual vale $\Phi(\mathfrak{a})$, não importando o que se coloque em lugar de $\mathfrak{a}$; o traço horizontal à direita da concavidade é o traço de conteúdo de $\Phi(\mathfrak{a})$, e aqui no lugar de $\mathfrak{a}$ cumpre pensar em algo determinado.

De acordo com o que se disse acima sobre o significado do traço de juízo, é fácil ver o que uma expressão como

$$-\!\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ X(\mathfrak{a})$$

significa. Esta pode ocorrer como parte de um juízo como em

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ X(\mathfrak{a}),\quad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\ A \\ \quad\llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ X(\mathfrak{a}) \end{array}.$$

É claro que destes juízos não se pode derivar juízos menos gerais como é possível fazer a partir de

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$$

pela substituição de $\mathfrak{a}$ por algo de determinado. Mediante $\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ X(\mathfrak{a})$, nega-se que $X(\mathfrak{a})$ seja sempre um fato, não importando o que se coloque no lugar de $\mathfrak{a}$. Isto não nega que possamos dar um significado Δ para $\mathfrak{a}$, de tal modo que $X(\Delta)$ seja um fato.

[O juízo]

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\ A \\ \quad\llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ X(\mathfrak{a}) \end{array}$$

significa que o caso em que $-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- X(\mathfrak{a})$ é afirmado e A é negado, não ocorre. Mas isto não nega o fato de que $X(\Delta)$ é afirmado e A é negado ocorra; pois, como vimos, $X(\Delta)$ pode ser afirmado, e $-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- X(\mathfrak{a})$ pode ser negado. Cabe, pois, colocar qualquer coisa no lugar de $\mathfrak{a}$, sem comprometer a verdade do juízo. Isto explica porque a concavidade com letra gótica nela escrita é necessária: *ela delimita o escopo* (Gebiet) *da generalidade designada pela letra*. *A letra gótica só mantém um significado [fixo] dentro de seu próprio escopo*. Em um juízo, a mesma letra gótica pode ocorrer em diferentes escopos sem que o significado à ela atribuído, em um escopo, se estenda aos demais [escopos]. O escopo de uma letra gótica pode incluir [o escopo] de outra [letra gótica], como mostra o exemplo

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} -\, A(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!- B(\mathfrak{a},\mathfrak{e}) \end{array}$$

Neste caso, cumpre escolher letras *diferentes*; não se pode [no exemplo acima] por $\mathfrak{a}$ no lugar de $\mathfrak{e}$. Naturalmente, é lícito substituir uma letra gótica, em todo o seu escopo, por outra letra determinada, sempre que nos lugares onde antes ocorriam letras distintas, permaneçam após a substituição ainda ocorrendo letras distintas. Isto não afeta o conteúdo. *Outras substituições são permitidas, sempre que a concavidade siga imediatamente o traço de juízo*, de tal modo que o conteúdo do juízo como um todo constitua o escopo da letra gótica. Por ser este um caso muito importante, introduzi a seguinte abreviação para o caso acima: *uma letra latina tem sempre como escopo a totalidade do conteúdo de um juízo*, sem que isto seja designado por meio de uma concavidade no traço de conteúdo. Se uma letra latina ocorre numa expressão não precedida por um traço de juízo, então esta expressão é carente de sentido. *Uma letra latina sempre pode ser substituída por uma letra gótica que ainda não tenha ocorrido no juízo*; neste caso, a concavidade deve ser introduzida logo após ao traço de juízo. Por exemplo, em vez de

$$\vdash X(a)$$

pode-se escrever

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- X(\mathfrak{a})$$

caso a só ocorra nos lugares de argumento de $X(a)$.

É claro também que de

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} -\, \Phi(a) \\ \llcorner\, A \end{array}$$

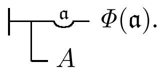
pode-se derivar

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} -\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \Phi(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\, A \end{array}$$

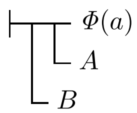
se *A for uma expressão em que a não ocorre, e se a estiver apenas no lugar de argumento em $\Phi(a)$*. Se $-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- \Phi(\mathfrak{a})$ for negado, então cumpre especificar um significado para a, de tal modo que $\Phi(a)$ seja negado. Portanto, se $-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- \Phi(\mathfrak{a})$ fosse negado e A afirmado, então teríamos de especificar um significado para a, de modo que A seria afirmado e $\Phi(a)$ seria negado. Mas, em virtude de

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} -\, \Phi(a) \\ \llcorner\, A \end{array},$$

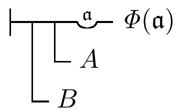
isto não pode ser feito, pois esta [expressão] significa que, o que quer que seja a, o caso em que $\Phi(a)$ é negado e A é afirmado, está excluído. Assim sendo, não se pode negar $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ $\Phi(\mathfrak{a})$ e afirmar A, vale dizer,



Do mesmo modo, de

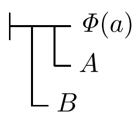


pode-se deduzir

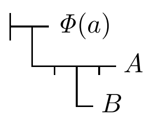


,

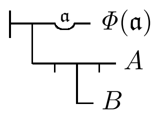
se a não ocorre nem em A e nem em B, e se $\Phi(a)$ só contiver a nos lugares de argumento. Este caso pode ser reduzido ao precedente, já que em vez de



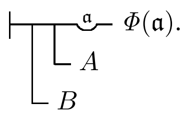
pode-se escrever



e

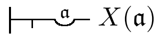


pode, por sua vez, se converter em



Considerações similares se aplicam, mesmo quando um número ainda maior de traços de condição estiver envolvido.

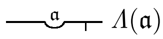
§12. Consideremos agora algumas combinações de sinais.



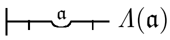
significa que se pode encontrar algo, digamos Δ, de modo que $X(\Delta)$ seja negada. Pode-se, pois, assim traduzir: "Existem algumas coisas que não têm a propriedade X".

Mas o sentido de

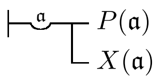
difere da anterior. Esta última significa: "O que quer que $\mathfrak{a}$ seja, $X(\mathfrak{a})$ tem sempre que ser negada"; ou "Não existe algo que tenha a propriedade X"; ou caso chamemos um X a algo que tenha a propriedade X: "não existe X". [A expressão]



é negada por



Pode-se traduzir esta última por: "Existem Λ"[h].



significa: "o que quer que se coloque em lugar de $\mathfrak{a}$, o caso em que $P(\mathfrak{a})$ deveria ser negado e $X(\mathfrak{a})$ afirmado, não ocorre". Assim, é possível que, segundo os significados que sejam atribuídos a $\mathfrak{a}$,

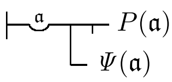
$P(\mathfrak{a})$ teria de ser afirmado e $X(\mathfrak{a})$ teria de ser afirmado; em outros casos

$P(\mathfrak{a})$ teria de ser afirmado e $X(\mathfrak{a})$ teria de ser negado; e segundo outros ainda

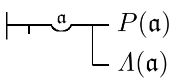
$P(\mathfrak{a})$ teria de ser negado e $X(\mathfrak{a})$ teria de ser negado.

Pode-se, portanto, traduzir: "se algo tiver a propriedade X, então também terá a propriedade P" ou "cada X é um P" ou "todos os X's são P's".

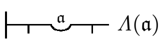
Este é o modo pelo qual são expressas as conexões causais.



significa: "nenhum significado pode ser dado a $\mathfrak{a}$, tal que $P(\mathfrak{a})$ e $\Psi(\mathfrak{a})$ possam ser conjuntamente afirmados". Pode-se, pois, traduzi-la como: "o que quer que tenha a propriedade Ψ não tem a propriedade P" ou "nenhum Ψ é um P".

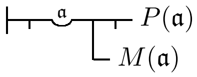


[h] Isto tem de ser entendido como incluindo o caso "existe um Λ". Por exemplo, se $\Lambda(x)$ significa a circunstância de que x seja uma casa, então entendemos



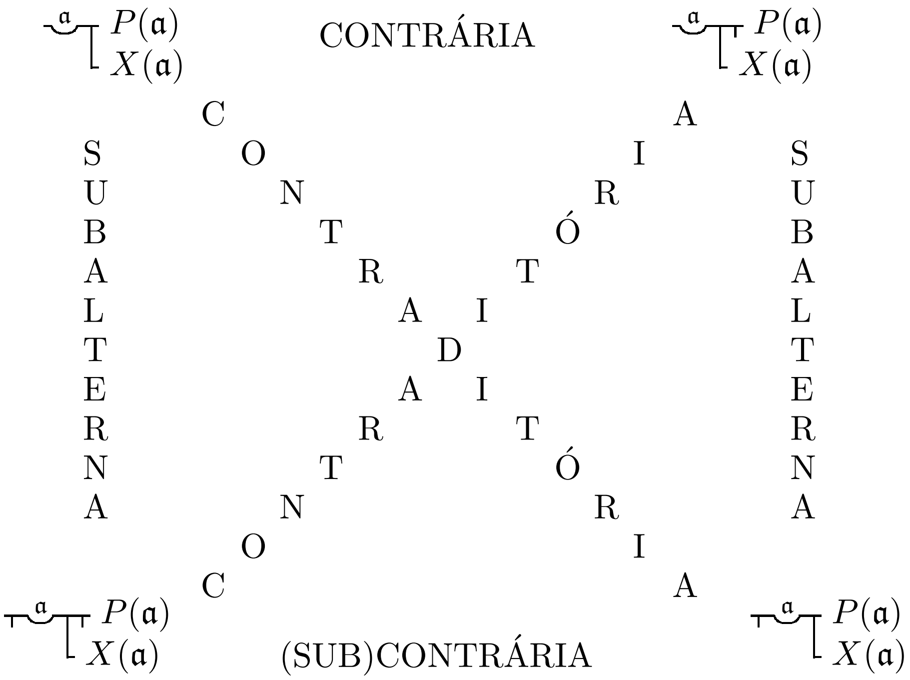
como: "existem casas ou [existe] pelo menos uma casa". Veja §2, nota v.

nega $P(\mathfrak{a})$ $\Lambda(\mathfrak{a})$ e, assim, pode ser interpretada como: “alguns Λ não são P”.



nega que nenhum M seja P e, assim, significa que “alguns[i] M’s são P’s”, ou “é possível que um M seja P”.

Deste modo, obtemos o quadrado de oposição lógica:



---

[i] Aqui, há que se entender a palavra “algum” como incluindo o caso “um”. Poderíamos dizer mais explicitamente: “alguns ou pelo menos um”.

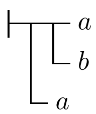
II. REPRESENTAÇÃO E DERIVAÇÃO DE ALGUNS JUÍZOS DO PENSAMENTO PURO

§13. Já nas primeiras seções introduzimos alguns princípios fundamentais do pensamento [puro] para serem transformados em regras de aplicação de nossos sinais. Estas regras, e as leis das quais são imagens, não podem ser expressas na conceitografia, posto que constituem sua base. Nestas [próximas] seções, alguns juízos do pensamento puro serão representados, na medida do possível, por sinais. Parece natural derivar estes juízos mais complexos dos mais simples, não com o objetivo de torná-los mais exatos, o que seria desnecessário na maioria dos casos, mas para ressaltar as relações dos juízos entre si. O mero conhecimento das leis [isoladamente] não é evidentemente o mesmo que o conhecimento de como elas se inter-relacionam entre si. Neste sentido, chega-se a um pequeno número de leis em que — caso se acrescente as leis contidas nas regras — está incluído, de modo latente, o conteúdo de todas as demais. Uma vantagem do modo dedutivo de representação é nos familiarizar com este núcleo (*Kernel*) [de leis]. Tendo em vista que não se pode enumerar todo o ilimitado número de leis que podem ser enunciadas, então só se pode alcançar a completude pesquisando aquelas que implicam, *potencialmente*, todas as demais. Há que se admitir, porém, que a solução aqui apresentada não é a única pela qual a redução pode ser feita. Assim sendo, nem todas as inter-relações entre as leis do pensamento são elucidadas mediante um modo de representação. Talvez ainda exista outra série de juízos a partir dos quais, com o acréscimo das leis contidas nas regras, poder-se-ia igualmente derivar todas as leis do pensamento. Mesmo assim, o modo de redução aqui apresentado evidencia uma tal quantidade de relações que qualquer outra derivação tornar-se-á muito mais fácil.

Nove é o número de proposições que formam o núcleo (Kern) da seguinte representação. Três destas — as fórmulas 1, 2 e 8 — exigem para sua expressão, além das letras, apenas o sinal de condicionalidade; três outras — as fórmulas 28, 31 e 41 — contêm também o sinal de negação; duas das proposições — as fórmulas 52 e 54 — contêm o sinal de identidade de conteúdo; e em uma proposição — a fórmula 58 — é usada a concavidade no traço de conteúdo[46].

A derivação que se segue cansaria o leitor, caso ele quisesse traçá-la em todos os seus detalhes; tal derivação serve apenas para assegurar uma resposta a qualquer pergunta sobre a dedução de uma lei.

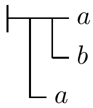
§14.

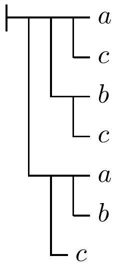


(1

diz: "o caso em que a é negada, b é afirmada e a é afirmada está excluído". Isto é evidente, já que a[47] não pode ser simultaneamente negada e afirmada. Pode-se também expressar o juízo em palavras do seguinte modo: "se uma proposição a vale, então ela também vale no caso em que uma proposição qualquer b valha"[48]. Façamos a, por exemplo, significar a proposição de que a soma dos ângulos de um triângulo ABC é igual a dois ângulos retos; e façamos b significar a proposição de que o ângulo ABC é um ângulo reto.

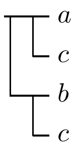
Deste modo, obtemos o juízo "se a soma dos ângulos do triângulo ABC é igual a dois ângulos retos, então isto também vale no caso em que o ângulo ABC seja um ângulo reto".

O 1 à direita de  é o número desta fórmula.

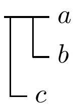


(2

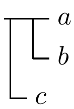
significa: "o caso em que



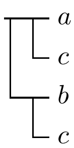
é negada e

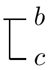


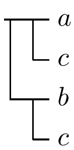
é afirmada não ocorre"[49]. Mas

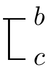
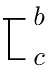


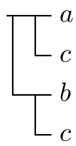
significa a circunstância em que se exclui o caso em que a é negada, b é afirmada e c é afirmada. A negação de



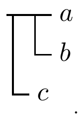
diz que  é negada e  é afirmada. Mas, a negação de  significa que a é negada e c é afirmada. Assim, a negação de



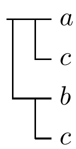
significa que a é negada, c é afirmada e  é afirmada. Mas, da afirmação de  e de c, segue-se a afirmação de b. Eis porque a negação de



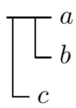
implica a negação de a e a afirmação de b e c. Precisamente este caso fica excluído pela afirmação de



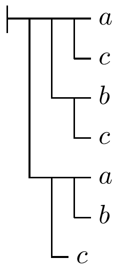
Portanto, não pode ter lugar o caso em que



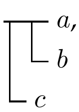
é negada e



é afirmada[50]. Tal é o que o juízo



assere. No caso em que nexos causais estiverem presentes, isto também pode ser assim expresso:

> "Se uma proposição (a) for consequência necessária de duas proposições (b e c), isto é, se , e se uma delas, (b), for por sua vez consequência necessária de outra, (c), então a proposição (a) é consequência necessária apenas da última proposição (c)".

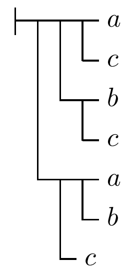
Por exemplo, suponhamos que

> c signifique que, na sequência numérica Z, cada termo sucessor seja maior do que o predecessor;
>
> b signifique que o termo M seja maior do que um termo L;
>
> a signifique que o termo N seja maior do que um termo L.

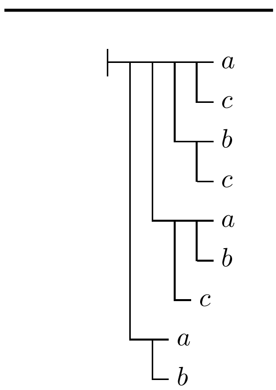
Assim, obtemos o seguinte juízo:

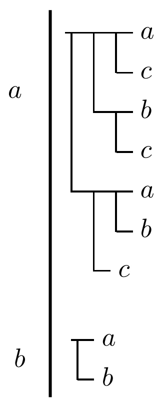
> "Se das proposições de que, na sequência numérica Z, cada termo sucessor é maior do que seu predecessor e de que o termo M é maior do que L, pode-se inferir que o termo N é maior do que L; e se da proposição de que, na sequência numérica Z, cada termo sucessor é maior do que seu predecessor, segue-se que M é maior do que L; então a proposição de que N é maior do que L pode ser derivada da proposição de que cada termo sucessor, na sequência numérica Z, é maior do que seu predecessor".

§15. 2



(1):

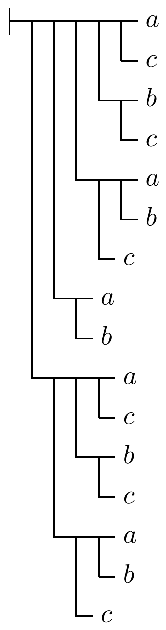




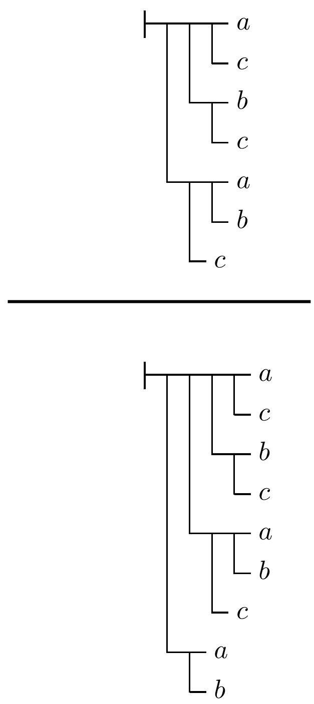
(3

O [numeral] 2 à esquerda [da fórmula] significa que a fórmula (2) está a sua direita. A inferência que permite a transição de (2) e (1) para (3) é abreviada segundo o que foi estipulado na §6. Escrita por extenso ela seria do seguinte modo:

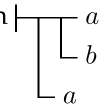
1



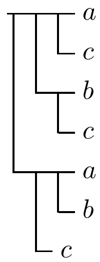
2



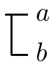
(3

A tabela menor que se vê abaixo de 1 serve para tornar a proposição (1) mais facilmente reconhecível na forma mais complexa em que aqui ocorre. Ela [a tabela] afirma que em  pode-se

por

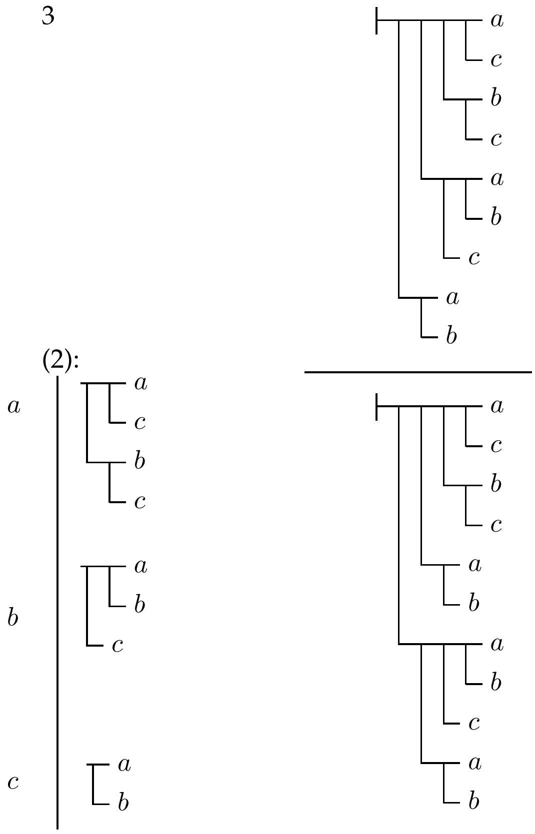


no lugar de a e



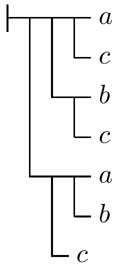
no lugar de b[51].

3

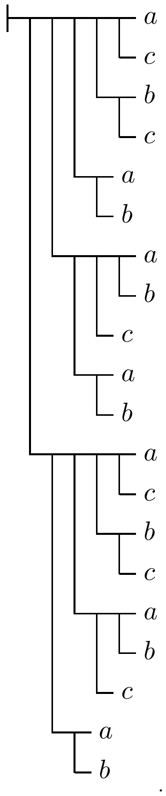


(4

A tabela abaixo de (2) significa que em

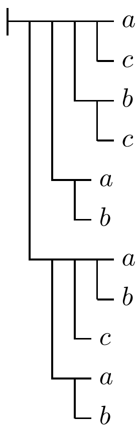


pode-se por no lugar de a, b e c, respectivamente, as expressões que estão à direita [na tabela]; como resultado obtemos

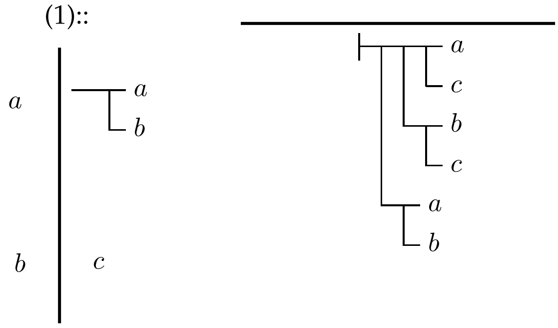


Vê-se imediatamente como (4) se segue desta e de (3)

4



(1)::



(5

O significado do duplo dois pontos foi explicado na §6[52]. Para exemplificar (5) seja

a a circunstância de que a barra de ferro E se torne magnetizada;

b a circunstância de que uma corrente galvânica percorra o fio D;

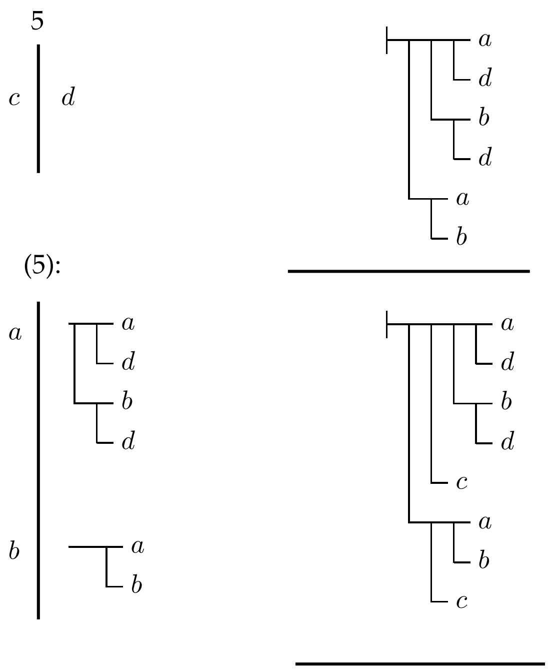
c a circunstância de que se ligue a chave T.

Obtemos, assim, o juízo:

> "Se vale a proposição de que E se magnetiza tão logo uma corrente galvânica percorra D; e se, além disso, vale a proposição de que uma corrente galvânica percorre D tão logo se ligue T; então, E se magnetiza, caso se ligue T".

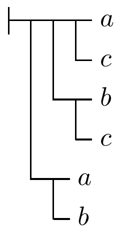
Caso se admita a presença de conexões causais, então (5) pode ser assim expressa:

> "Se b for uma condição suficiente de a, e se c for uma condição suficiente para b, então c será uma condição suficiente para a".

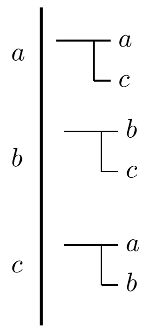


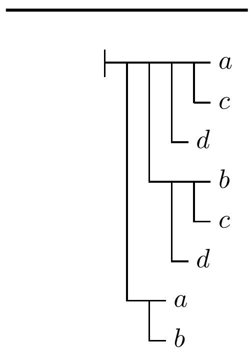
(6

5



(6):





(7

Esta proposição só difere da proposição (5) porque, em lugar da única condição c, dispomos agora de duas condições c e d.

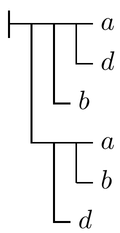
Um exemplo de (7). Digamos que

> d signifique a circunstância de que o pistão K de uma bomba de ar se mova da extrema esquerda para a extrema direita;
> c signifique a circunstância de que a válvula V esteja na posição I;
> b signifique a circunstância de que a densidade D do ar no cilindro da bomba de ar se reduza à metade;
> a signifique a circunstância de que a altura H da escala do barômetro conectado com o interior do cilindro [da bomba de ar] desça à metade [da altura anterior].

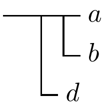
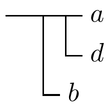
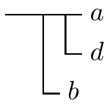
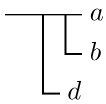
Assim, obtemos o juízo:

> "se vale a proposição de que a altura H do barômetro desce à metade, assim que a densidade D do ar for reduzida a metade;
> se vale a proposição de que a densidade D do ar é reduzida a metade, caso o pistão K se mova da extrema esquerda para a extrema direita, e se a válvula H esteja na posição I;
> então segue-se que
> a altura H do barômetro chega à metade, caso o pistão K se mova da extrema esquerda para a extrema direita, enquanto a válvula H estiver na posição I".

§16.

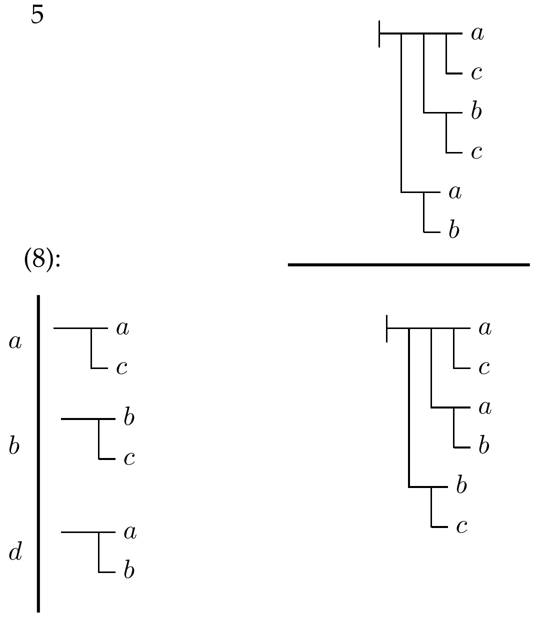


(8

 significa que não ocorre o caso em que a é negado, mas b e d são afirmados;  significa a mesma coisa; e (8) diz que está excluído o caso em que  é negado e  é afirmado. Isto pode ser expresso ainda da seguinte forma: "se uma proposição é consequência de duas condições, então sua ordem [de tais condições] é irrelevante".

5

(8):

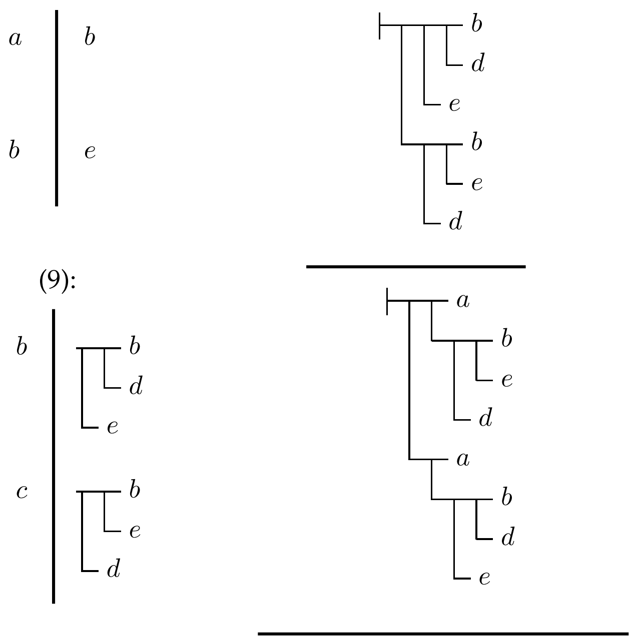


(9

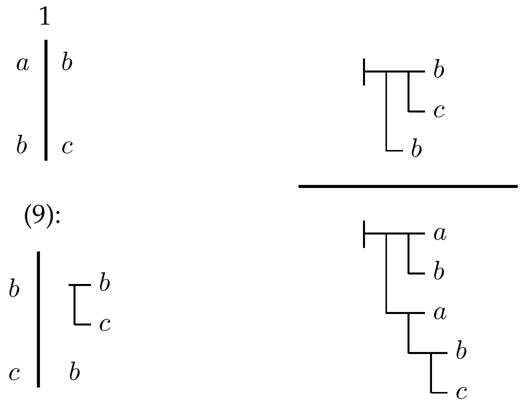
A diferença entre esta proposição e a [proposição] (5) não é essencial.

8

(9):

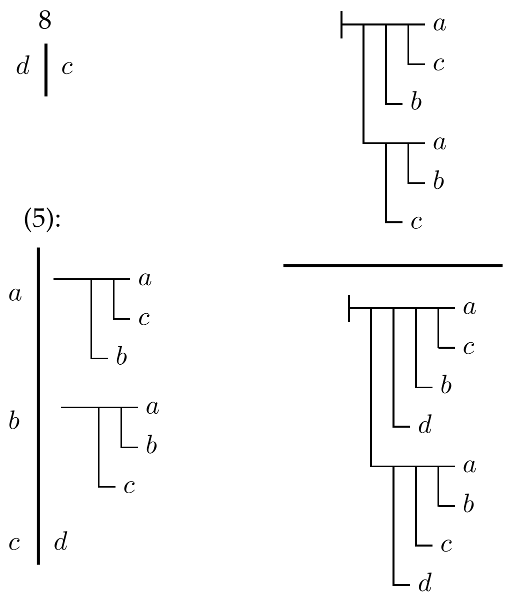


(10



(11

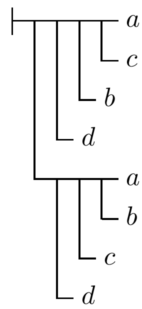
Esta fórmula pode ser traduzida assim: “se a proposição de que b ocorre ou c não ocorre é condição suficiente para a, então b, isoladamente, é condição suficiente para a”



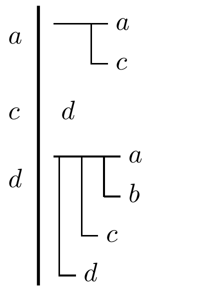
(12

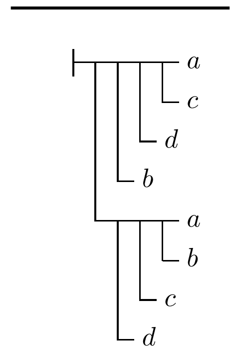
As proposições (12) a (17) e a proposição (22) mostram como pode se modificar a ordem, quando atuam diversas condições.

12



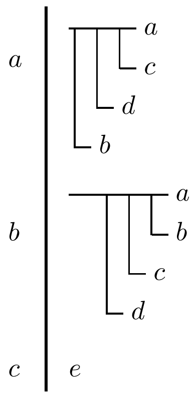
(12):

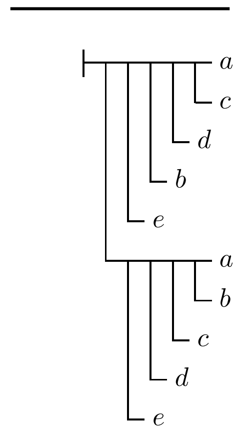




(13

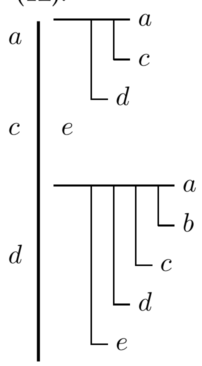
(5):

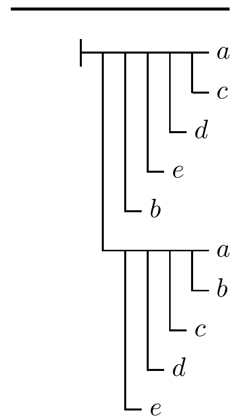




(14

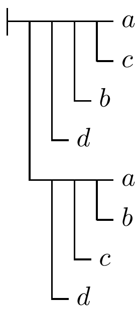
(12):



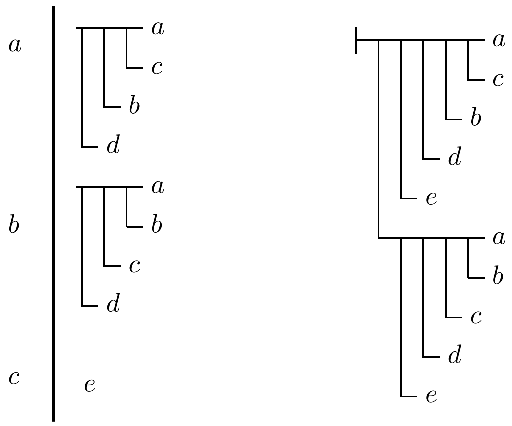


(15

12

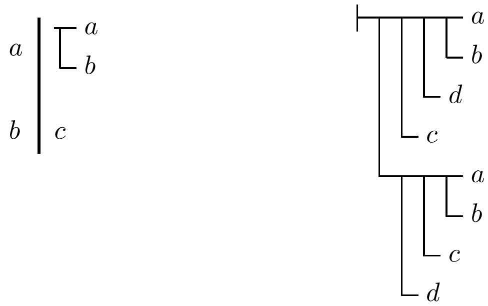


(5):

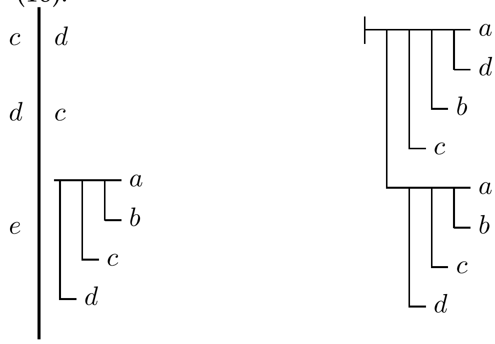


(16

8

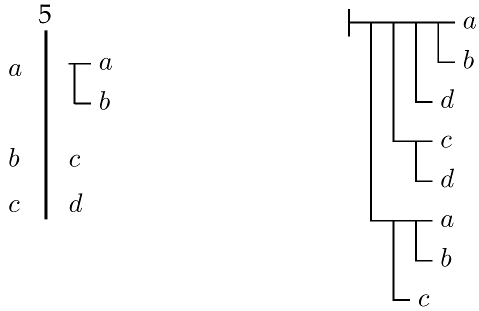


(16):

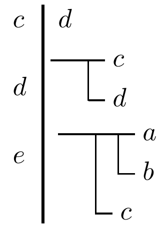


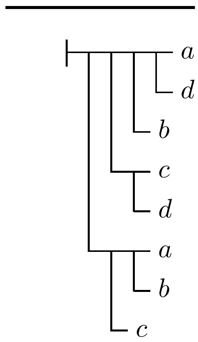
(17

5



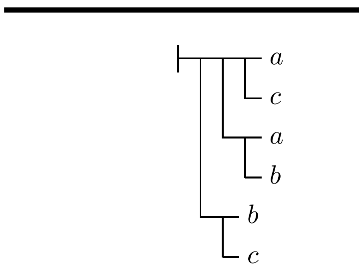
(16):



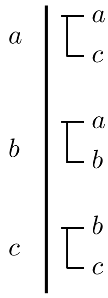


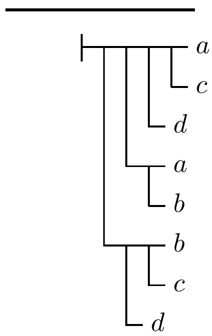
(18

9



(18):

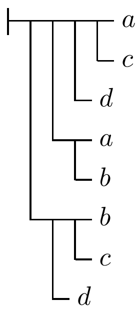




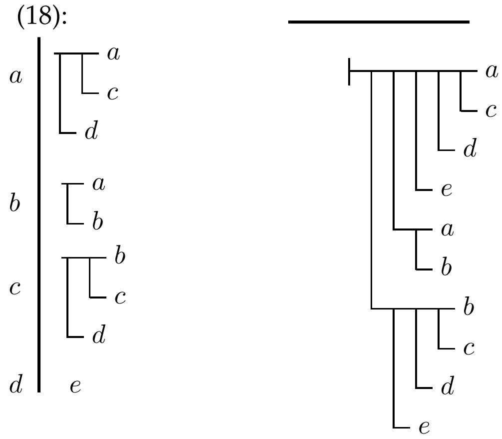
(19

A diferença entre esta proposição e a (7) é irrelevante.

19



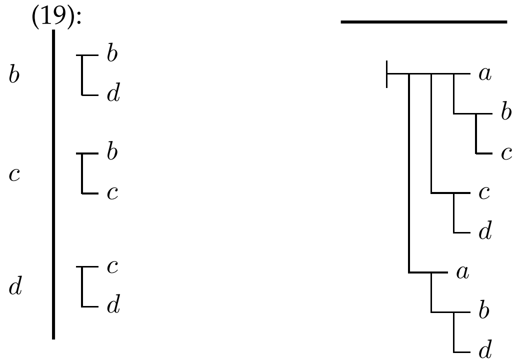
(18):



(20

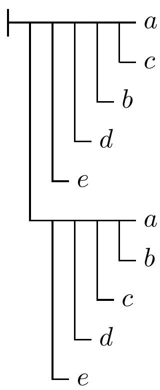
9

(19):

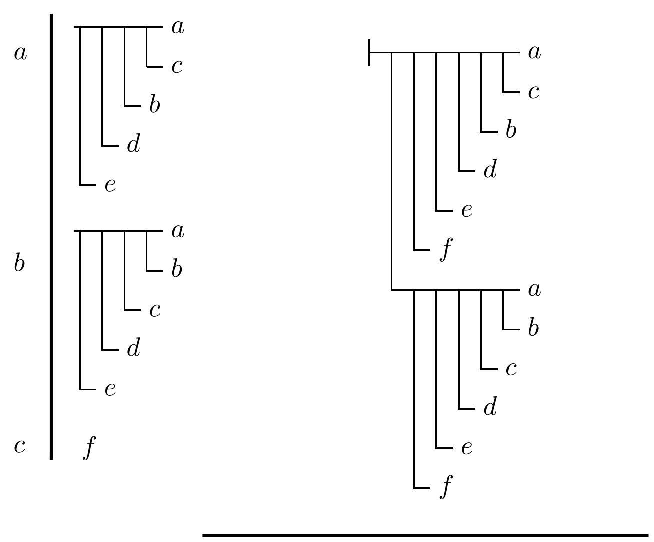


(21

16

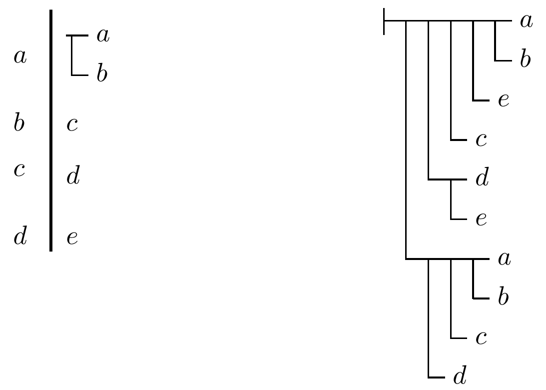


(5):

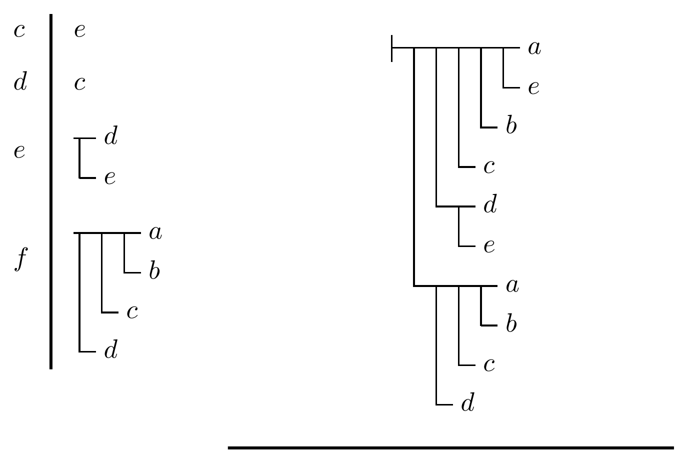


(22

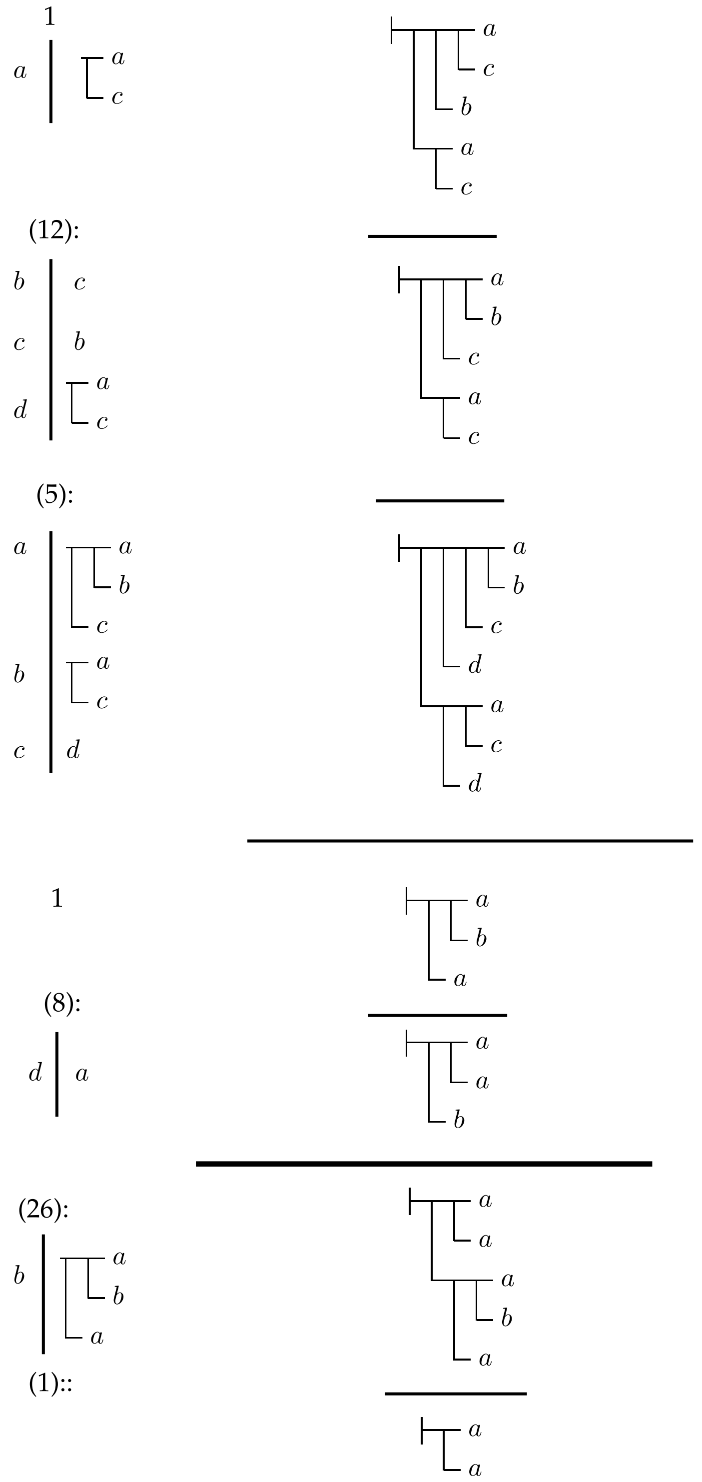
18



(22):



(23



(24

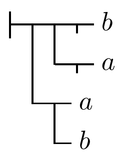
(25

(26

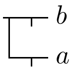
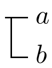
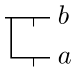
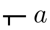
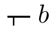
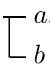
(27

Não se pode [simultaneamente] afirmar a e negar a.

§17.



(28

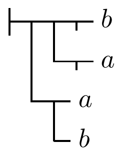
significa: "o caso em que  é negado e  é afirmado não ocorre"[53]. A negação de  significa que  é afirmado e  é negado; isto é, que a é negado e b é afirmado. Este caso é excluído por . Este juízo justifica a transição do *modus ponens* para o *modus tollens*. Por exemplo, digamos que

b significa que proposição de que o homem M vive; e
a significa que a proposição de que M respira.

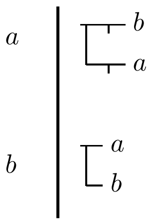
Então temos o juízo:

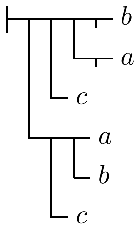
"se da circunstância de que M vive, pode-se inferir que respira, então da circunstância de que não respira, pode-se inferir sua morte".

28



(5):

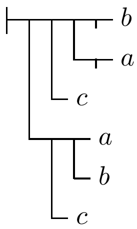




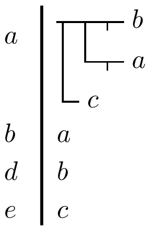
(29

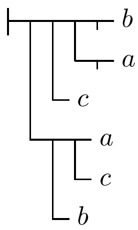
Se b e c [conjuntamente] são condições suficientes para a, então da negação de a e da afirmação de uma das condições (c), pode-se inferir a negação da outra condição.

29



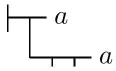
(10):





(30

§18.

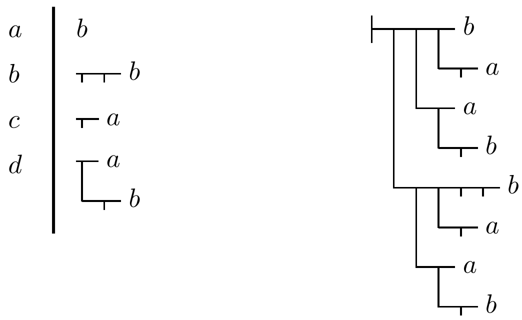


(31

⊤⊤ a significa a negação da negação, portanto a afirmação de a[54]. Donde, não se pode negar a e (simultaneamente) afirmar ⊤⊤ a. *Duplex negatio affirmat*. A negação de uma negação é uma afirmação.

31

(7):



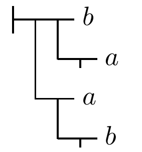
(32

(28)::

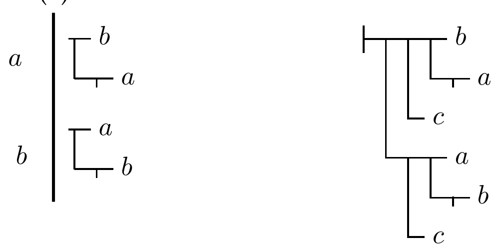
(33

Se a ou b ocorrem, então b ou a ocorrem.

33



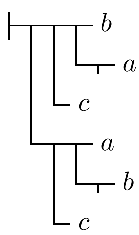
(5):

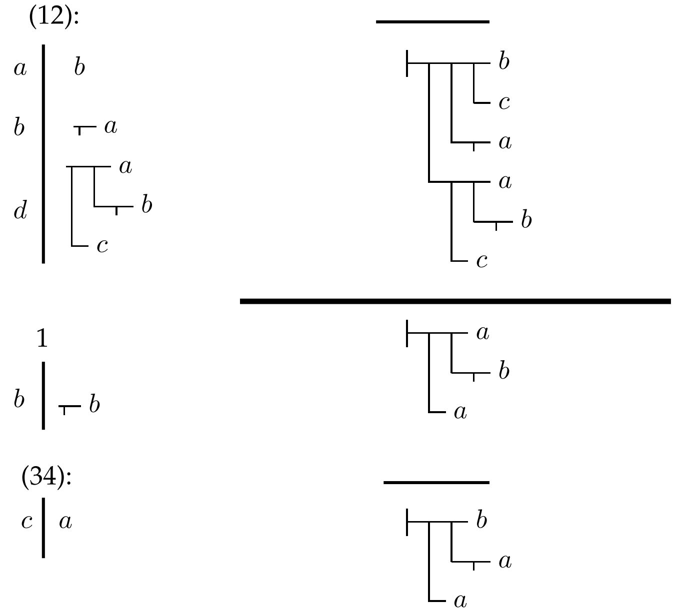


(34

Se a ocorrência da circunstância c conjuntamente com a exclusão do obstáculo b tem como consequência a ocorrência de a, então da não ocorrência de a conjuntamente com a ocorrência de c, pode-se inferir a ocorrência do obstáculo b.

34

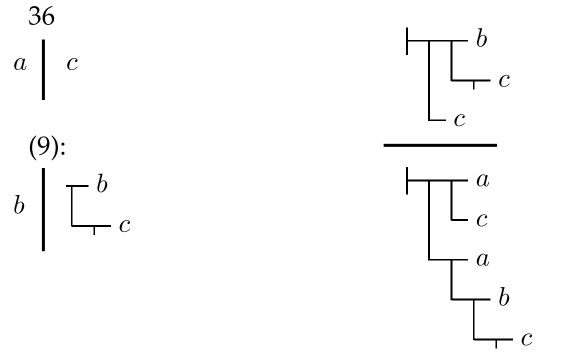




(35

(36

O caso em que b é negado, $\top\!\!-\ a$ é afirmado e a é afirmado não ocorre. Pode-se expressar isto assim: "se a ocorre, então uma das duas: a ou b ocorre".



(37

Se a é consequência necessária da ocorrência de b ou c, então a é consequência necessária de c apenas[55]. Por exemplo, façamos que

> b signifique a circunstância de que o primeiro fator de um produto P seja 0;
> c signifique a circunstância de que o segundo fator de P seja 0;
> a signifique a circunstância de que o produto de P seja 0.

Então temos o juízo:

> "Se o produto P for 0, no caso em que o primeiro ou o segundo fator for 0, então do desaparecimento do segundo fator pode-se inferir o desaparecimento do produto"[56].

(8):

(38

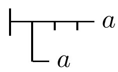
(2):

(39

(35):

(40

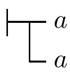
§19.



(41

A afirmação de a nega a negação de a.

27



(41):

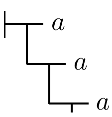
(42

(40):

(43

Se a opção é apenas entre a e a, então a ocorre. Por exemplo, digamos que caiba distinguir entre dois casos que [conjuntamente] exaurem todas as possibilidades. Seguindo a primeira [opção], chega-se ao resultado de que a ocorre; ao mesmo resultado se chega, quando se segue a segunda [opção]. Então, a proposição a vale.

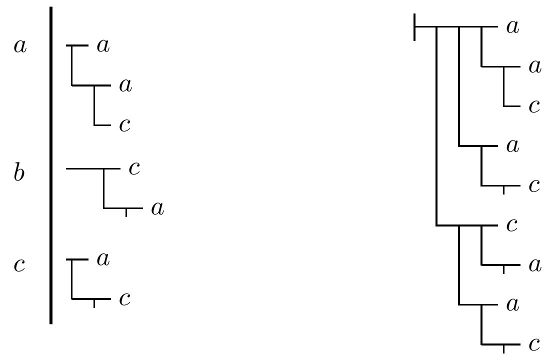
43



(21):

(44

(5):



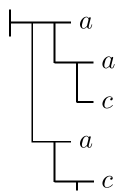
(45

(33)::

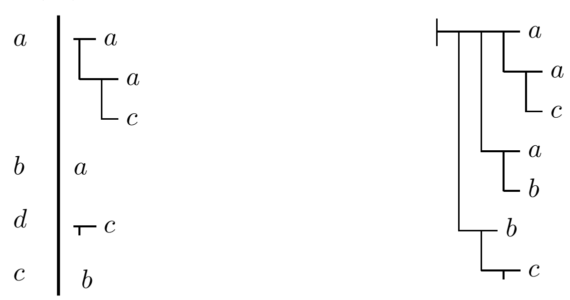
(46

Se a vale não só quando c ocorre, mas também quando c não ocorre, então a vale. Outro modo de expressar esta questão: "se a ou c ocorrem, e se a ocorrência de c tem a como uma consequência necessária, então a ocorre".

46



(21):



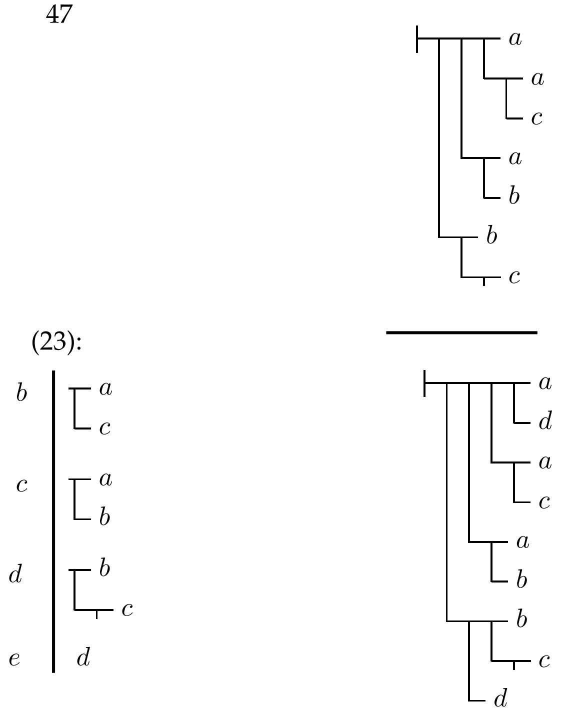
(47

Pode-se expressar esta proposição assim: "se tanto c como b são condições suficientes para a, e se b ou c ocorrem, então a proposição a vale". Este juízo é usado quando, numa prova, dois casos devem ser distinguidos. Quando vários casos ocorrem, pode-se sempre reduzi-los a dois, tomando um dos casos como o primeiro e a totalidade dos demais como o segundo. O último

[caso] pode, por sua vez, ser subdividido em dois casos, e isto pode ser reiterado tantas vezes quanto sejam possíveis outras divisões.

47

(23):

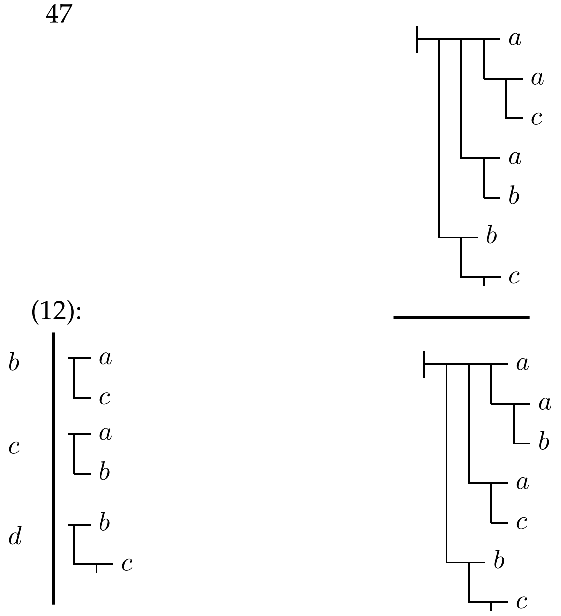


(48

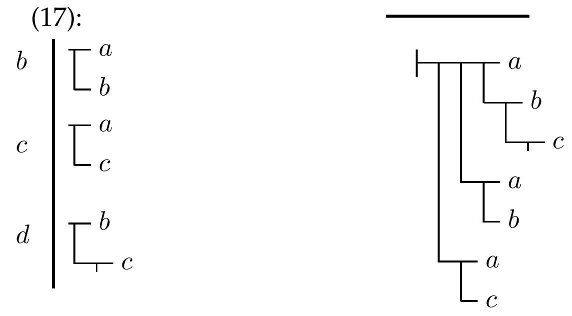
Se d é uma condição suficiente para que b ou c ocorram, e se tanto b como c são condições suficientes para a, então d é uma condição suficiente para a. Um exemplo de uma aplicação [desta proposição] é fornecido pela derivação da fórmula (101).

47

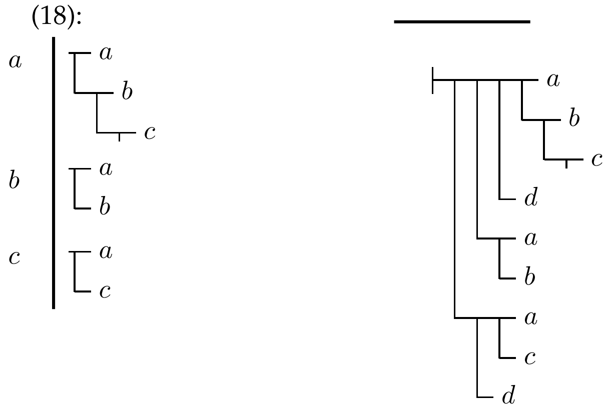
(12):



(49

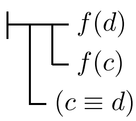


(50



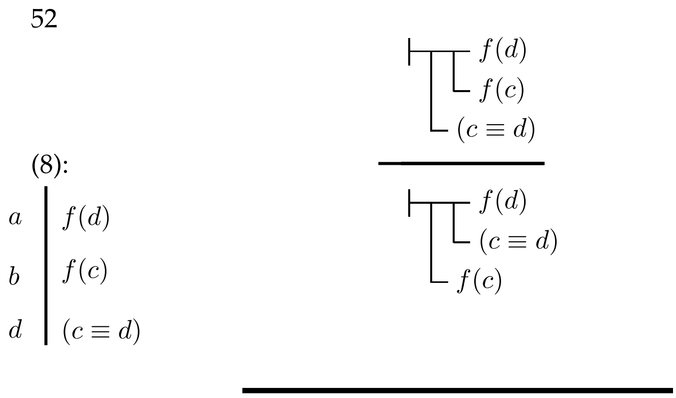
(51

§20.



(52

O caso em que o conteúdo de c é igual ao conteúdo de d, e em que $f(c)$ é afirmado e $f(d)$ é negado, não tem lugar[57]. Esta proposição afirma que se $c \equiv d$, então pode-se substituir c, em qualquer lugar, por d. Em $f(c)$, também c pode ocorrer em outros lugares além dos lugares para argumento. Consequentemente, c pode estar também contido em $f(d)$.

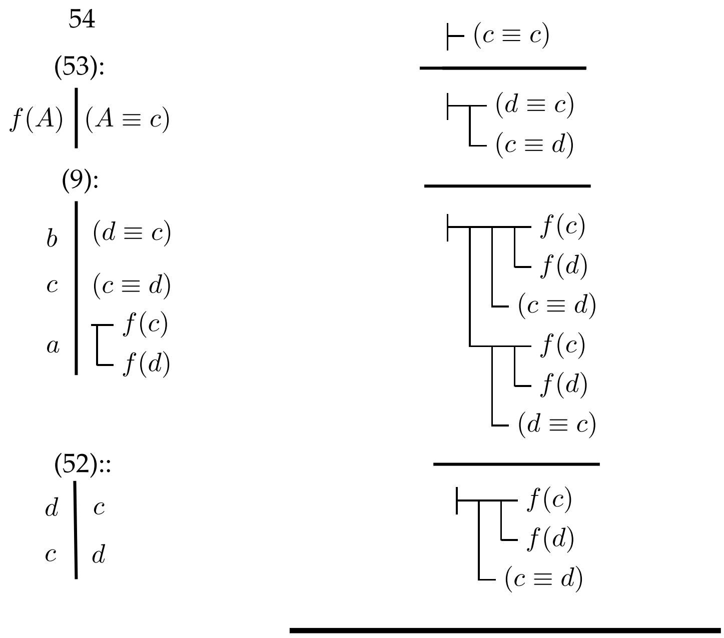


(53

§21.

$$\vdash (c \equiv c)$$ (54

O conteúdo de c é igual ao conteúdo de c[58] [59].

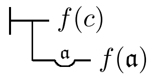


(55

(56

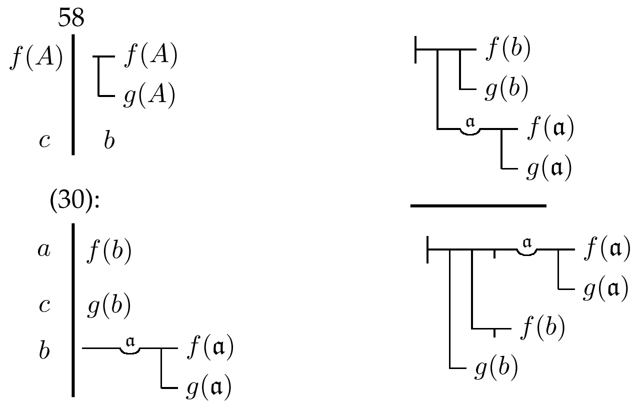
(57

§22.



(58

$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})$ significa que $f(\mathfrak{a})$ ocorre, qualquer que seja a coisa que se entenda por $\mathfrak{a}$. Portanto, se $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})$ é afirmada, então $f(c)$ não pode ser negada. Isto é o que expressa nossa proposição[60]. Aqui, $\mathfrak{a}$ só pode ocorrer nos lugares para argumento de f, já que esta função também ocorre, no juízo, fora do escopo de $\mathfrak{a}$.



(59

Exemplo[61]. Digamos que

b signifique um avestruz, isto é, um animal individual que pertença a esta espécie;

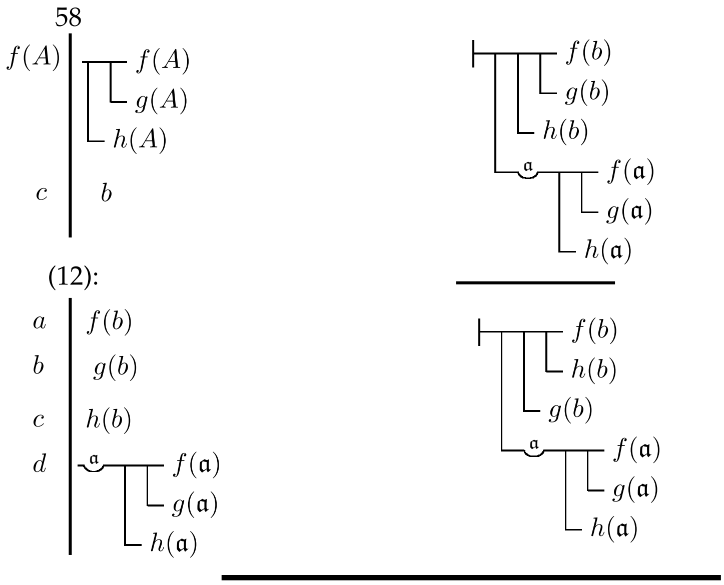
$g(A)$ signifique "A é uma ave";

$f(A)$ signifique "A pode voar".

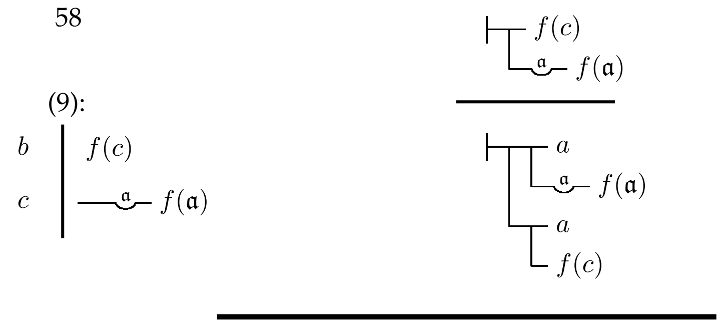
Então temos o juízo:

"Se este avestruz é uma ave e não pode voar, então disto se infere que algumas aves[a] não podem voar".

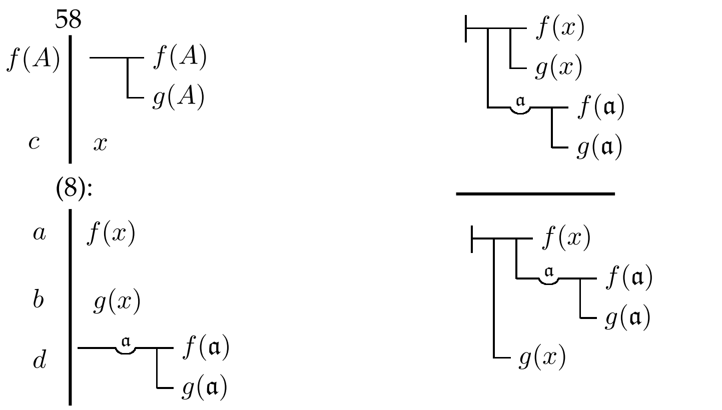
Vemos como este juízo substitui um modo de inferência, isto é, Felapton ou Fesapo, que aqui não distinguimos, já que nenhum sujeito [lógico ou gramatical do juízo] foi distinguido.



(60



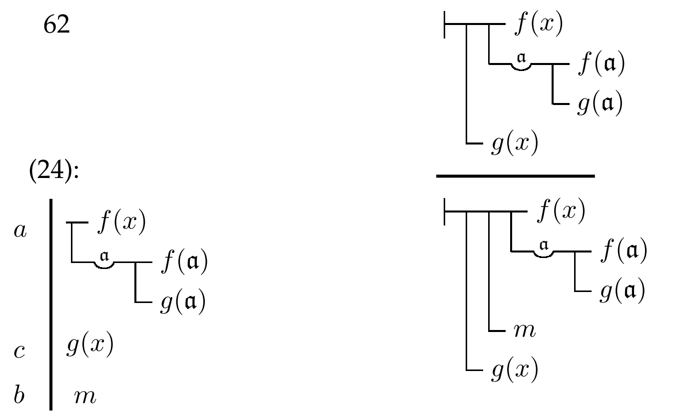
(61



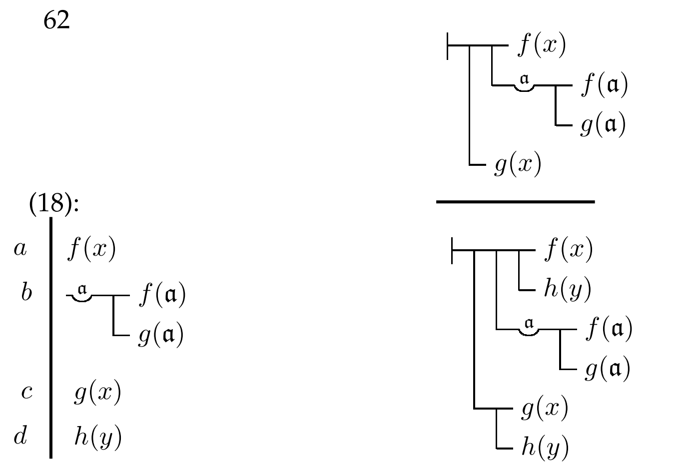
(62

Este juízo substitui o modo de inferência Barbara, quando a premissa menor $(g(x))$ tem um conteúdo particular.

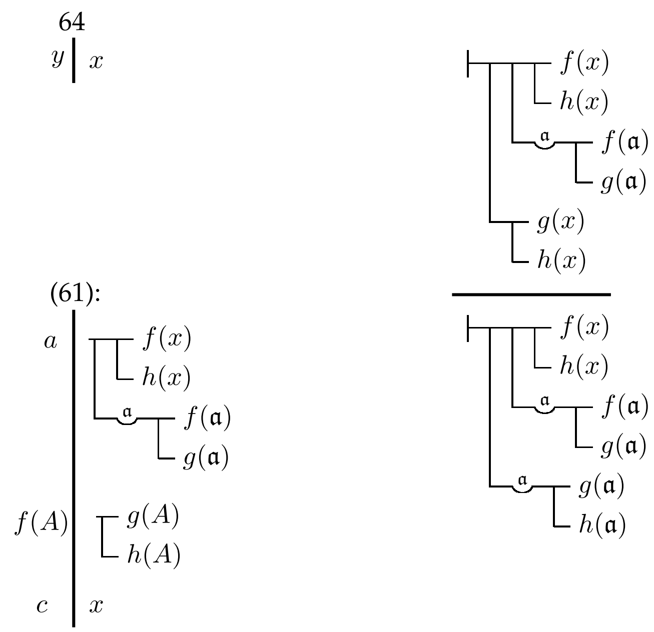
[a] Veja §12, nota xi.



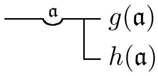
(63



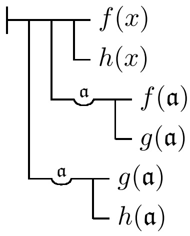
(64



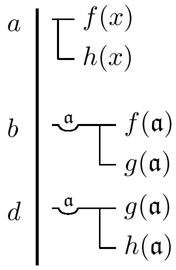
(65

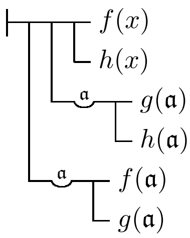
Aqui, 𝔞 ocorre em dois escopos, sem que isto indique qualquer relação particular entre eles. Em um desses escopos, poder-se-ia também escrever 𝔢 em lugar de 𝔞. Este juízo substitui o modo de inferência Barbara, quando a premissa menor  tiver um conteúdo universal. O leitor que se familiarizar com o modo pelo qual são conduzidas as derivações nesta conceitografia estará também em condição de derivar os juízos que correspondem aos outros modos de inferência. Aqui bastam estes como exemplo:

65



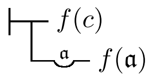
(8):



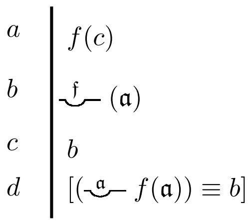


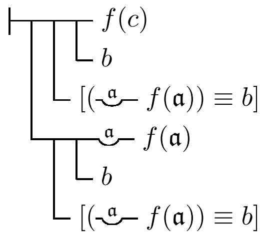
(66

58



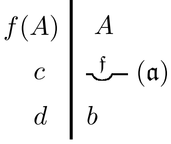
(7):

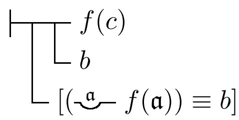




(67

(57)::





(68

III. TÓPICOS DE TEORIA GERAL DAS SEQUÊNCIAS

§23. As derivações que se seguem pretendem dar uma ideia geral de como manipular esta conceitografia, embora não sejam suficientes talvez para demonstrar sua completa utilidade. Isto só se tornaria mais claro quando proposições mais complicadas forem consideradas. Além disso, vemos por esses exemplos como o pensamento puro, que independe de qualquer conteúdo dado pelos sentidos ou a priori por uma intuição, é capaz, por si só, de gerar — a partir do conteúdo que surge de sua própria natureza — juízos que, à primeira vista, só parecem possíveis tendo como fundamento alguma intuição. Isto pode ser comparado à condensação pela qual é possível transformar o ar, que para uma consciência infantil se afigura como nada, em um fluido visível formador de gotículas. As proposições sobre sequências, desenvolvidas no que se segue, decididamente ultrapassam em generalidade a todas as proposições que possam ser derivadas de qualquer intuição de sequência. Portanto, se alguém considera mais apropriado tomar como base uma ideia intuitiva de sequência, então não devemos esquecer que as proposições assim obtidas, embora venham a ter o mesmo aspecto (*gleichen Wortlaut*) das que se veem aqui, ainda assim estariam longe de ser como estas, já que só teriam validade no domínio da intuição sobre a qual se apoiam[62].

§24.

$$\Vdash \left(\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!\!-\!\!\!\!\!\top\!\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\!\!\top\!\!- F(\mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad\qquad \llcorner\, f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad \llcorner\, F(\mathfrak{d}) \end{array} \right) \equiv \frac{\delta}{\alpha}\!\!\left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ f(\delta,\alpha) \end{array} \right) \right) \tag{69}$$

Esta proposição se distingue dos juízos até aqui considerados por conter sinais que não foram previamente definidos; ela mesmo oferece esta definição. Tal proposição não diz: "o lado direito da equação tem o mesmo conteúdo que o esquerdo", mas "eles [ambos os lados] devem ter o mesmo conteúdo". Esta proposição, portanto, não é um juízo e, consequentemente, também não é um *juízo sintético*, para usar uma expressão kantiana. Digo isto, porque Kant considerava sintéticos todos os juízos da matemática. Mas, se (69) fosse um juízo sintético, também o seriam as proposições dela derivadas. Mas podemos prescindir da notação introduzida por esta proposição e, consequentemente, podemos prescindir dela como definição [dos símbolos]: dela nada se segue que não possa também ser inferido sem ela. O objetivo de tais definições é produzir uma simplificação extrínseca ao estipular uma abreviação. Além disso, elas servem para destacar uma particular combinação de sinais face a todas as possíveis combinações para, assim, alcançar uma compreensão mais firme de uma ideia. Apesar da simplificação mencionada ser de difícil percepção, devido ao pequeno número de juízos aqui apresentados, mesmo assim incluí esta fórmula a título de exemplo.

Embora (69) não seja originalmente um juízo, mesmo assim ela pode ser facilmente transformada em um juízo; pois, uma vez estipulado o significado dos novos sinais, ela permanece fixa daí por diante; e a fórmula (69) vale também como um juízo, mas como um juízo analítico, já que ela só faz evidenciar o que está incluso nos novos sinais. Este duplo aspecto da fórmula é indicado pela duplicação do traço de juízo. Assim, no que diz respeito às derivações que se seguem, a fórmula (69) pode ser tratada como um juízo ordinário[63].

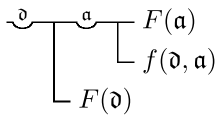
As letras gregas minúsculas, usadas aqui ocorrem pela primeira vez, não representam nenhum conteúdo independente, como tampouco o fazem as letras góticas e latinas. Em relação a elas, a única coisa que cumpre observar é se são idênticas ou distintas, donde se poder colocar no lugar de α e δ quaisquer outras letras gregas minúsculas, desde que os lugares anteriormente ocupados por letras idênticas sejam novamente ocupados por outras letras idênticas e que letras diferentes não venham a ser substituídas pela mesma letra. *Mas esta igualdade ou diversidade de letras gregas só têm relevância dentro da fórmula na qual elas foram especialmente introduzidas, como em*

$$\begin{matrix}\delta\\ |\\ \alpha\end{matrix}\Big(\begin{matrix}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}.$$

Seu objetivo é capacitar a reconstrução, sem ambiguidade e em qualquer momento, a partir da forma abreviada

$$\begin{matrix}\delta\\ |\\ \alpha\end{matrix}\Big(\begin{matrix}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix},$$

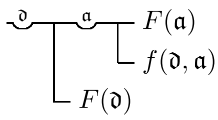
a forma não-abreviada



Por exemplo,

$$\begin{matrix}\alpha\\ |\\ \delta\end{matrix}\Big(\begin{matrix}F(\delta)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}$$

significa a expressão



enquanto que

$$\begin{matrix}\alpha\\ |\\ \delta\end{matrix}\Big(\begin{matrix}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}$$

carece de sentido. Vê-se que a expressão não-abreviada, não importa quão complicadas as funções F e f possam ser, sempre poderá ser restabelecida com exatidão, exceto a escolha arbitrária das letras góticas. Podemos traduzir

$$\vdash f(\Gamma,\Delta)$$

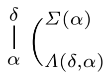
por "Δ é resultado de uma aplicação do procedimento f a Γ", ou por "Γ é o objeto de uma aplicação do procedimento f, cujo resultado é Δ" ou por "Δ está em relação f com Γ" ou ainda "Γ é inconversa da relação f com Δ". Tais expressões devem ser tomadas como tendo o mesmo significado[64].

$$\begin{matrix}\delta\\ |\\ \alpha\end{matrix}\Big(\begin{matrix}F(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}$$

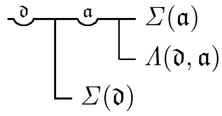
pode ser traduzida "a circunstância de que a propriedade F é hereditária na sequência f". Talvez o seguinte exemplo possa tornar esta expressão plausível. Façamos

$\Lambda(M.N)$ significar a circunstância de que N é filho de M.

$\Sigma(P)$ significar a circunstância de que P é humano. Então,



ou



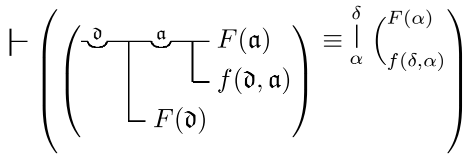
é a circunstância de que todo filho de um ser humano é, por sua vez, um ser humano, ou que a propriedade de ser humano é hereditária.

Mas pode se tornar difícil ou até mesmo impossível dar uma tradução em palavras, caso funções muito complicadas venham a ocorrer nos lugares de F e f. Deste modo, a proposição (69) poderia ser expressa em palavras assim:

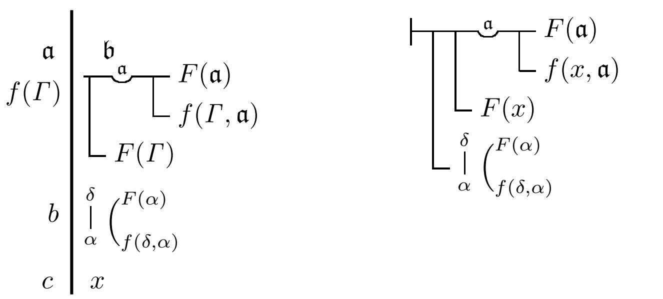
> "Se da proposição de que b tem a propriedade de F, qualquer que seja b, for sempre possível inferir que cada resultado de uma aplicação do procedimento f a b tem a propriedade F, então digo que
> 'a propriedade F é hereditária na sequência f'."[65]

§25.

69

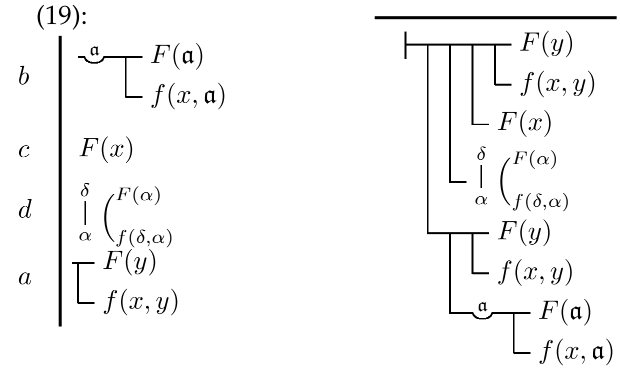


(68):



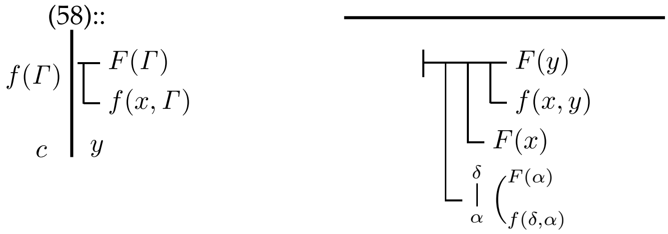
(70

(19):



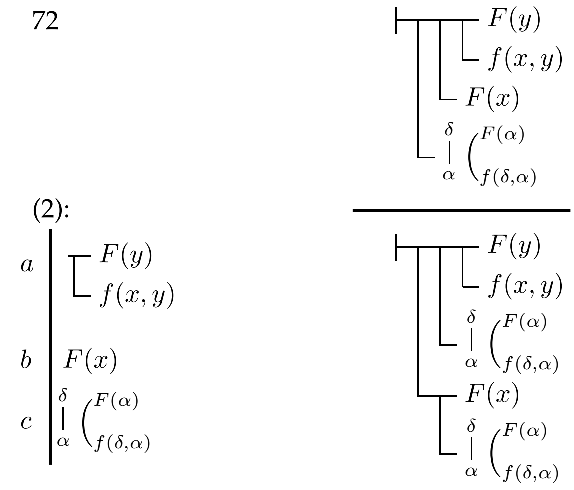
(71

(58)::

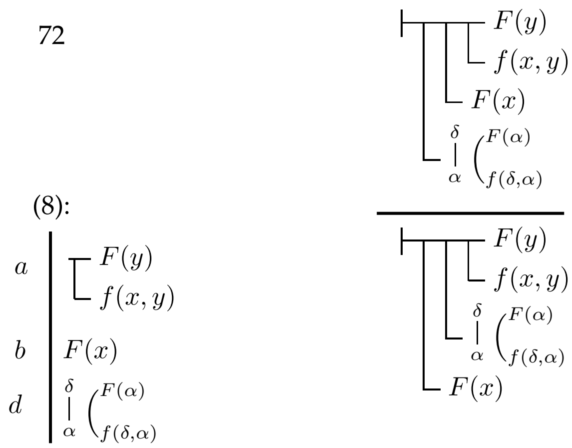


(72

Se a propriedade F for hereditária na sequência f e se x tiver a propriedade F, e se y for o resultado de uma aplicação do procedimento f a *x, então y tem a propriedade F*[66].

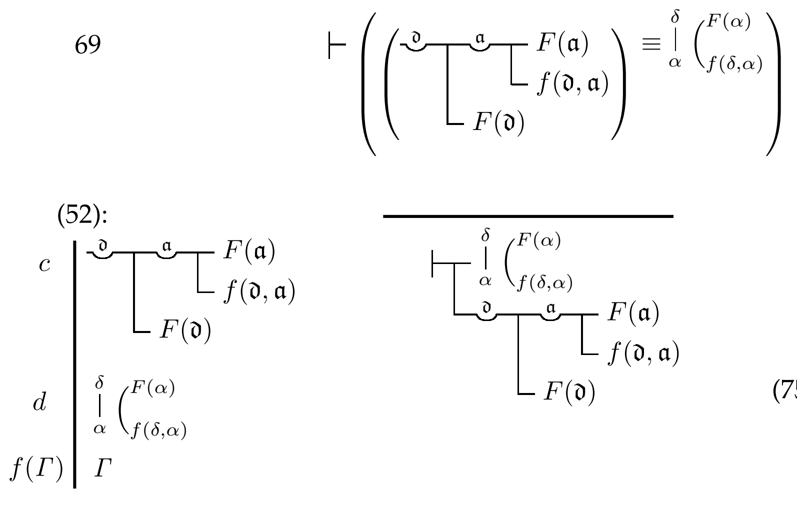


(73



(74

Se x tem a propriedade F que é hereditária na sequência f, então cada resultado de uma aplicação do procedimento f a x tem a propriedade F.



(75

Se da proposição de que b tem a propriedade F, qualquer que seja b, pode-se inferir que cada resultado de uma aplicação do procedimento f a b tem a propriedade F, então a propriedade F é hereditária na sequência f.

§26.

$$\Vdash \left(\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!\!\top\!\!\!-\!\!-\, \mathfrak{F}(y) \\ \qquad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\, \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad \llcorner\, f(x,\mathfrak{a}) \\ \quad\; \begin{smallmatrix}\delta\\ | \\ \alpha\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{F}(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{smallmatrix}\right.\end{array}\right) \equiv \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)\right) \qquad (76$$

Esta é a definição da combinação de sinais $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$, que se encontra à direita [do sinal de conteúdo na expressão acima]. Remeto o leitor à §24, no que diz respeito ao duplo traço de juízo e às letras gregas. Não se pode escrever apenas

$$\overset{x}{\underset{y}{\sim}} f(x, y)$$

em lugar da expressão acima, pois quando uma função de x e y for escrita por completo, estas letras podem ocorrer fora dos lugares de argumento; e, se isto ocorrer, não seríamos capazes de dizer que lugares devem ser tidos como lugares de argumento. Consequentemente, estes últimos devem ser assinalados como tais. Isto é aqui realizado por meio dos índices [inferiores] γ e β. Devemos, porém, escolher índices distintos, já que os dois argumentos podem [eventualmente] ser idênticos entre si. Para tanto, usaremos letras gregas de maneira que possamos ter uma certa liberdade de escolha quanto aos sinais — no caso em que

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

incluir em si mesma uma expressão similarmente construída — para assim marcar os lugares de argumento na expressão incluída de maneira distinta do modo de indicar os lugares de argumento na expressão incluinte. *O fato de as letras gregas serem idênticas ou distintas, só tem aqui relevância dentro da expressão*

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta);$$

estas mesmas letras podem ser usadas fora da expressão, sem que isto indique qualquer relação com as letras [que ocorrem dentro da expressão].

Traduzimos

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

por “*y segue x na sequência f*”; um modo de falar que, seguramente, só é possível à medida que a função f for determinada. Da mesma forma, (76) pode ser expressa em palavras mais ou menos assim:

> *Se das duas proposições — a de que de todo resultado de uma aplicação do procedimento f a x tem a propriedade F, e a de que a propriedade F é hereditária na sequência f, qualquer que seja F — pode-se inferir que y tem a propriedade F;*

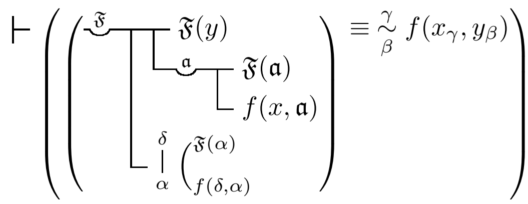
então digo eu:

> *“y segue x na sequência f” ou “x precede y na sequência f”*[a] [67]

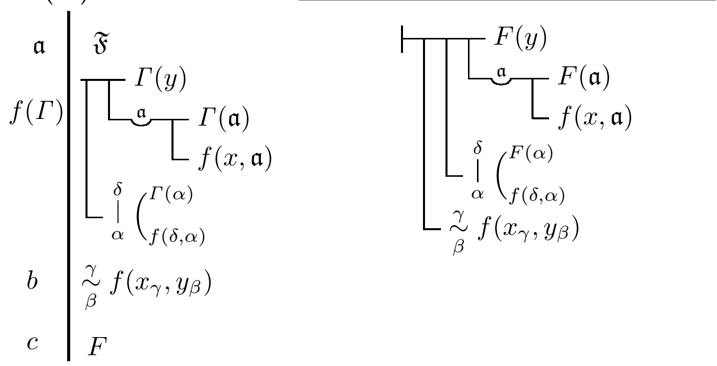
[a] Para tornar claro a generalidade do conceito de ordenação em uma sequência que aqui oferecemos, lembro ao leitor algumas possibilidades. Entre estas não está somente uma sequência tal como um colar de pérolas mostra, mas também uma ramificação como a de uma árvore genealógica, uma união de vários ramos, assim como, um processo circular que retorna a seu início (*ringartiges Insichzurücklaufen*).

§27.

76



(68):

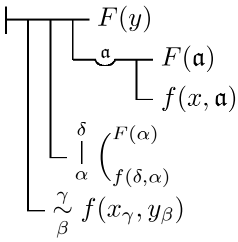


(77

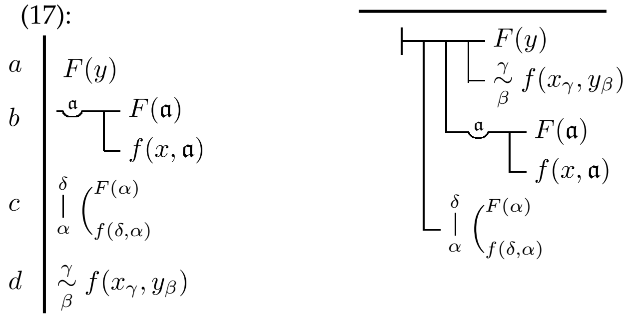
Aqui, $F(y)$, $F(a)$ e $F(\alpha)$ devem ser considerados, de acordo com a §10, como funções diferentes de argumento F[68]. (77) significa:

Se y segue x na sequência f, e se a propriedade F é hereditária na sequência f, e se todo resultado de uma aplicação do procedimento f a x tem a propriedade F, então y tem a propriedade F.

77

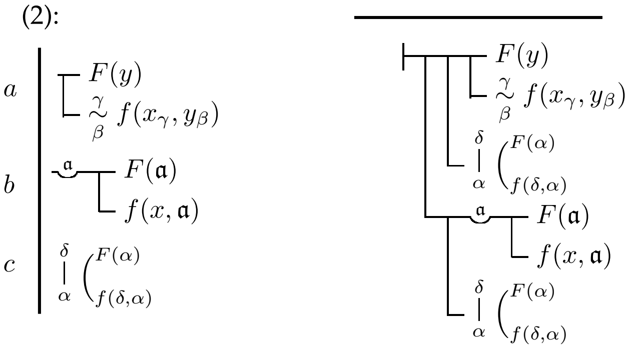


(17):



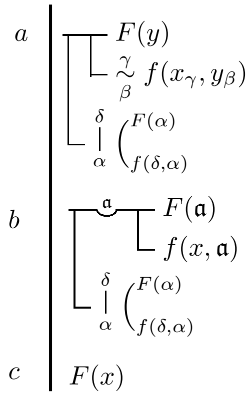
(78

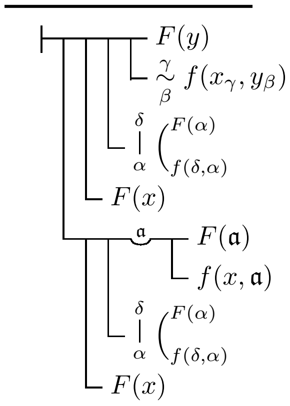
(2):



(79

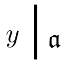
(5):

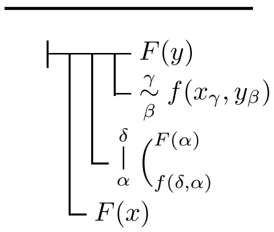




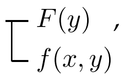
(80

(74)::





(81

Dado que em (74) y só ocorre em  , então a concavidade pode, consoante a §11, preceder imediatamente esta expressão, quando se substitui y pela letra gótica $\mathfrak{a}$. Podemos traduzir (81) assim:

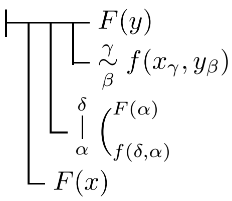
> *Se x tem a propriedade F que é hereditária na sequência f, e se y segue x na sequência f, então y tem a propriedade F.*[b][69]

Por exemplo, seja F a propriedade de ser um monte de ervilhas; seja f o procedimento de remover uma ervilha de um monte de ervilha, de modo que

$$f(a, b)$$

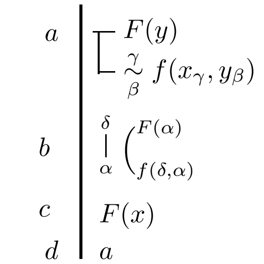
signifique a circunstância de que b contém todas as ervilhas do monte a, exceto uma e nada mais. Assim sendo, pela nossa proposição chegaríamos ao resultado de que uma única ervilha, ou mesmo nenhuma, seria um monte de ervilha se a propriedade de ser um monte de ervilha for hereditária na sequência f. Em geral, porém, isto não é o caso, já que existem certos z para os quais $F(z)$ não é um [conteúdo] asserível por força da indeterminação do conceito de "monte".

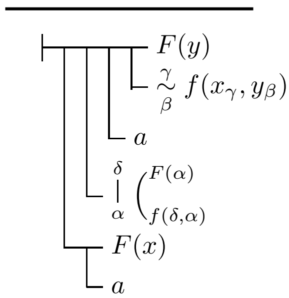
81



[b] Nisto se baseia a indução bernoulliana.

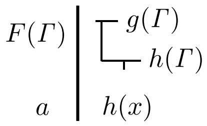
(18):

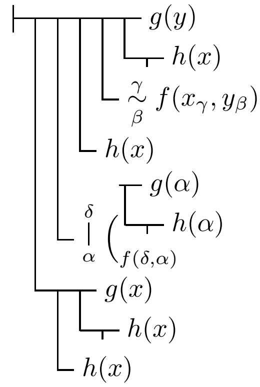




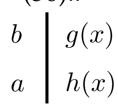
(82

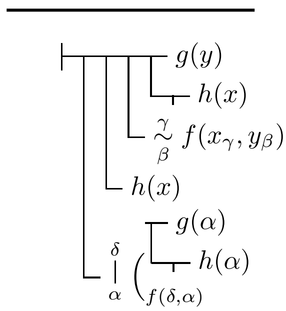
82





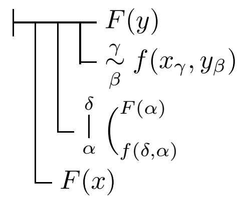
(36)::



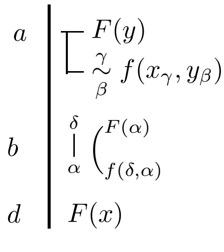


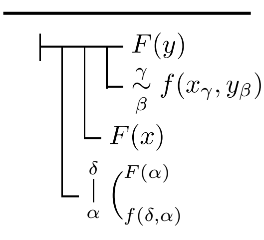
(83

81



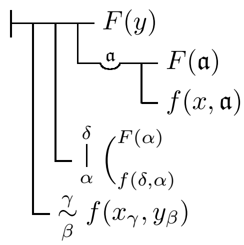
(8):



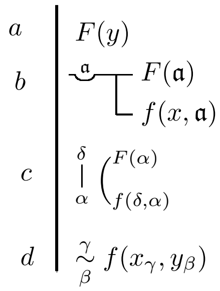


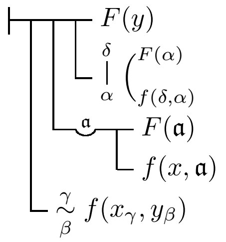
(84

77



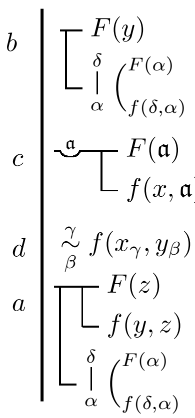
(12):

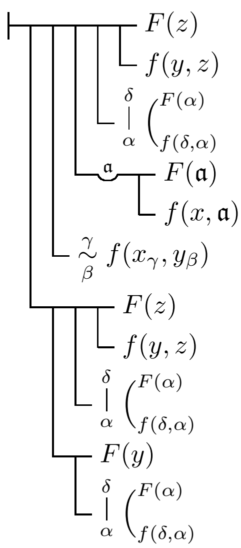




(85

(19):

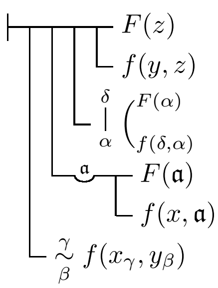




(86

(73)::

y	z
x	y



(87

Em palavras, a derivação desta proposição seria aproximadamente a seguinte. Seja

α) y segue x na sequência f;

β) todo resultado de uma aplicação do procedimento f a x tem a propriedade F;

γ) a propriedade F é hereditária na sequência f;

Destas premissas se segue, de acordo com (85), que

δ) y tem a propriedade F.

ϵ) z é o resultado de uma aplicação do procedimento f a y.

Então, segundo (72)[70], a partir de (γ), (δ) e (ϵ), segue-se que

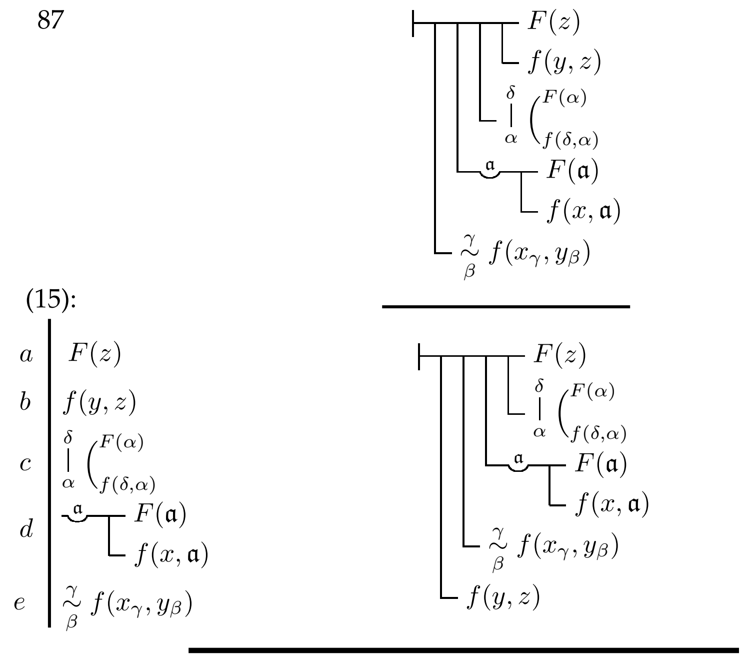
z tem a propriedade F.

Portanto,

Se z é o resultado de uma aplicação do procedimento f a um objeto y que segue x na sequência f, e se todo resultado de uma aplicação do procedimento f a x tem a propriedade F que é hereditária na sequência f, então z tem a propriedade F.

87

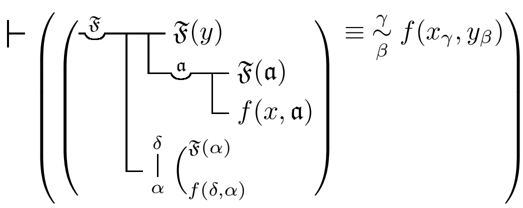
(15):

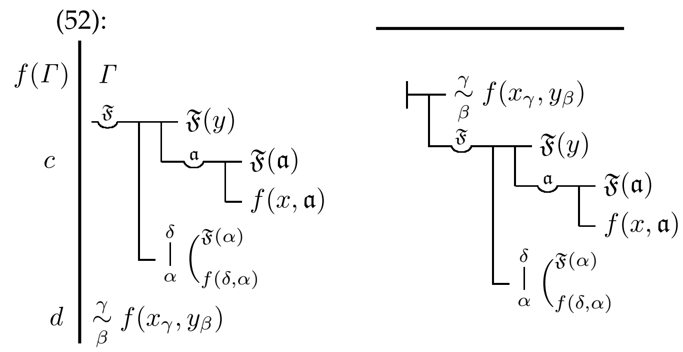


(88

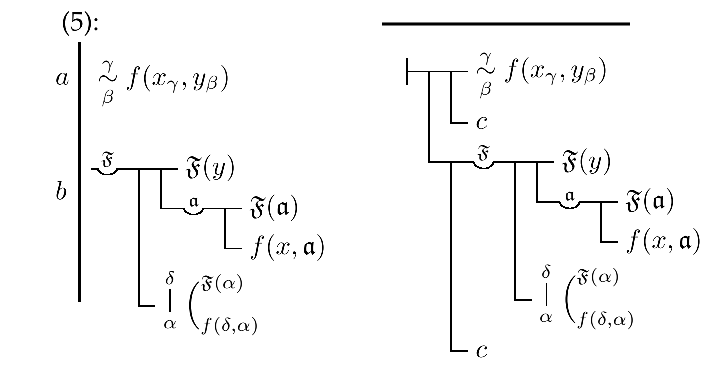
§28.

76

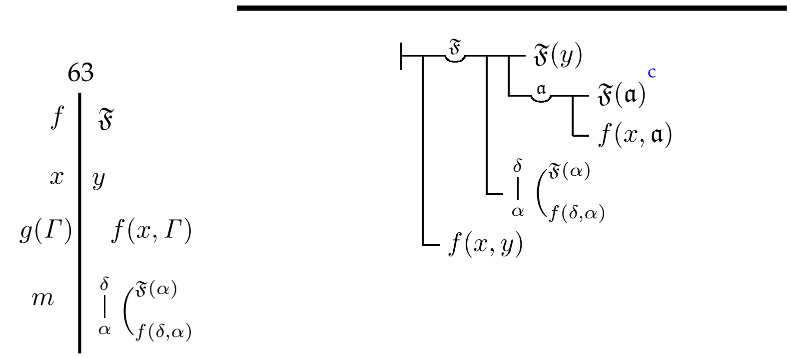




(89



(90



(91

Apresentamos a seguir a derivação da proposição (91) com palavras.

A partir da proposição

> α) "cada resultado de uma aplicação do procedimento f a x tem a propriedade $\mathfrak{F}$"

pode-se inferir, para qualquer que seja $\mathfrak{F}$, que

> cada resultado de uma aplicação do procedimento f a x tem a propriedade $\mathfrak{F}$.

Portanto, a partir da proposição (α) e da proposição de que a propriedade $\mathfrak{F}$ é hereditária na sequência f, para qualquer que seja $\mathfrak{F}$, pode-se inferir também:

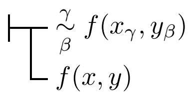
[c] A respeito da concavidade com $\mathfrak{F}$, veja-se §11.

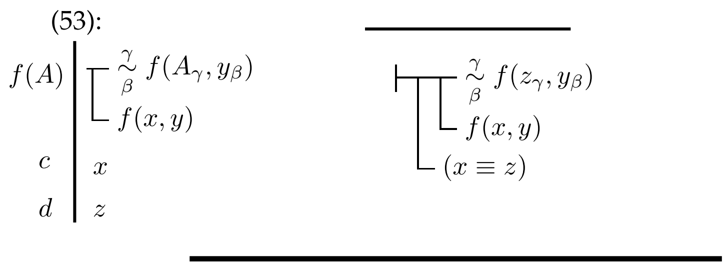
cada resultado de uma aplicação do procedimento f a x tem a propriedade $\mathfrak{F}$.

Portanto, de acordo com (90), vale a proposição seguinte:

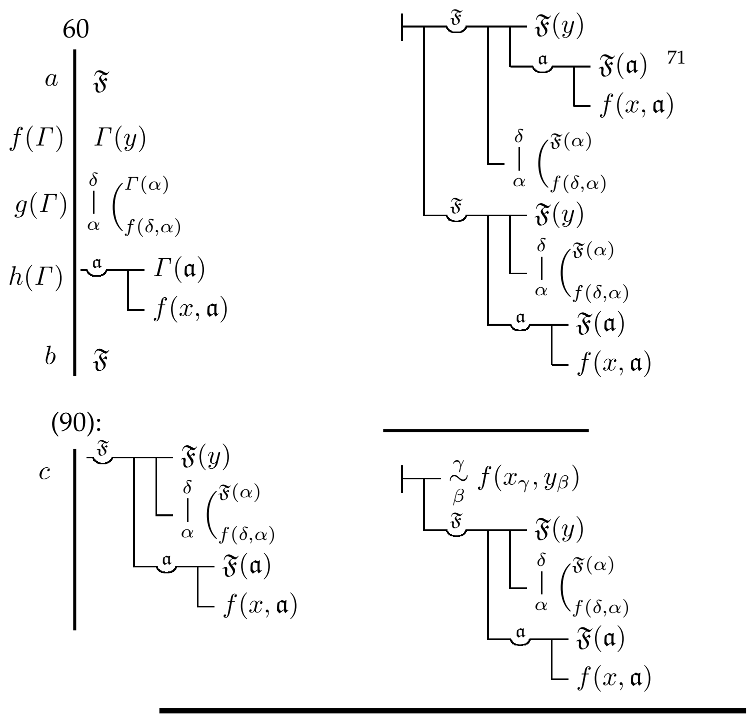
Cada resultado de uma aplicação do procedimento f a um objeto x segue este x na sequência f.

91

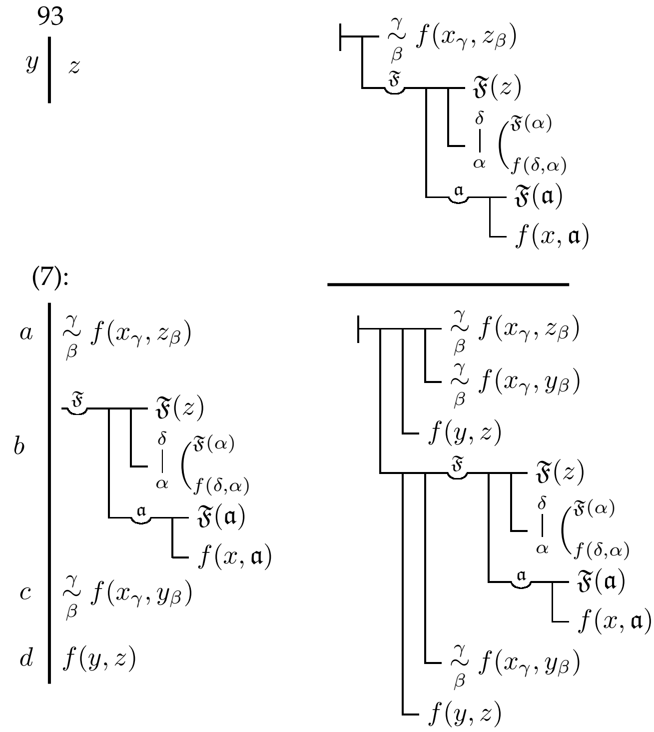




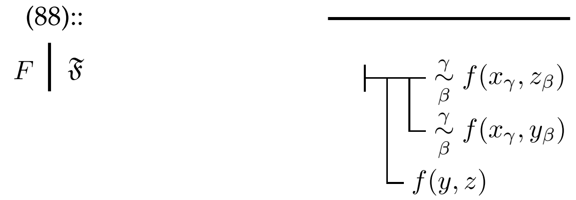
(92



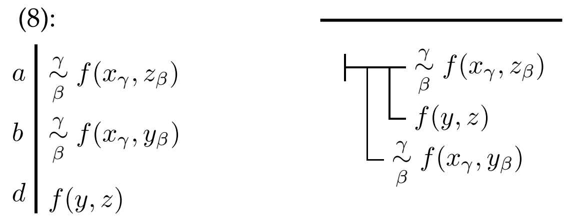
(93



(94

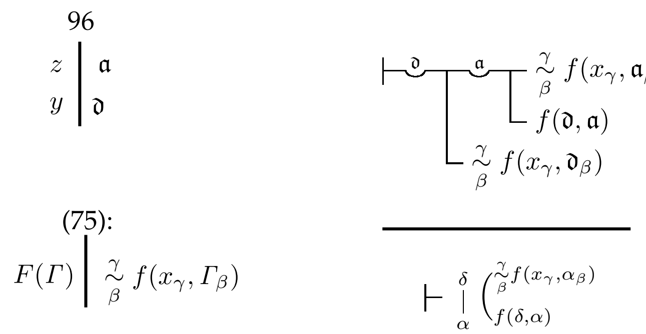


(95



(96

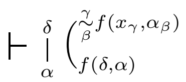
Cada resultado de uma aplicação do procedimento f a um objeto que segue x na sequência f, segue x na sequência f.



(97

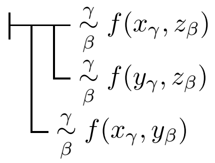
A propriedade de seguir x na sequência f é hereditária na sequência f.

97



(84):

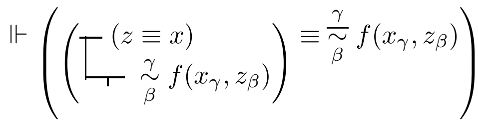
$$\begin{array}{r|l} F(\mathit{\Gamma}) & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, \mathit{\Gamma}_\beta) \\ x & y \\ y & z \end{array}$$



(98

Se y segue x na sequência f, e se z segue y na sequência f, então z segue x na sequência f.

§29.



(99

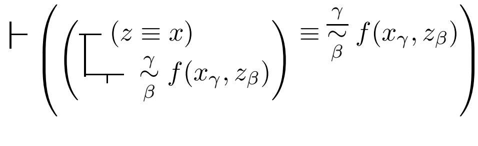
Aqui, remeto ao que foi dito relativamente às fórmulas (69) e (76), sobre a introdução de novos sinais. A expressão

$$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta)$$

pode ser assim traduzida: "z pertence à sequência f que começa com x" ou por "x pertence à sequência f que termina com z"[72]. Então, em palavras, (99) pode ser lida:

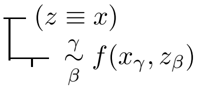
> *Se z é idêntico a x ou segue x na sequência f, então digo: "z pertence à sequência f que começa com x"; ou então "x pertence à sequência f que termina com z".*

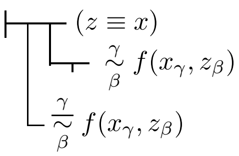
99



(57):

$$\begin{array}{r|l} f(\mathit{\Gamma}) & \mathit{\Gamma} \\ c & \\ d & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array}$$

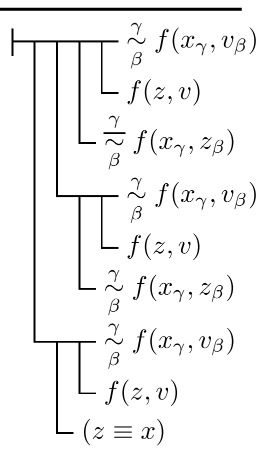




(100

(48):

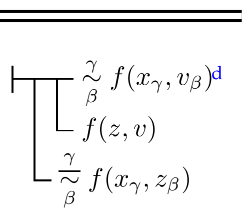
$$\begin{array}{c|l} b & (z \equiv x) \\ c & \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ d & \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ a & \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, v_\beta) \text{ ; } f(z, v) \end{array}$$



(101

(96, 92)::

$$\begin{array}{c|c} y & z \\ z & v \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} x & z \\ z & x \\ y & v \end{array}$$



(102

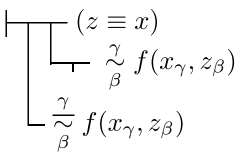
Podemos dar aqui a derivação de (102) em palavras.

> Se z é idêntico a x, então de acordo com (92), todo resultado de uma aplicação do procedimento f a z segue x na sequência f. Se z segue x na sequência f, então por (96), todo resultado de uma aplicação do procedimento f a z segue x na sequência f.

Destas duas proposições se segue, de acordo com (100):

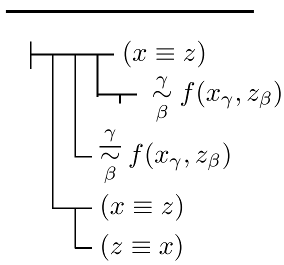
> *Se z pertence à sequência f que começa com x, então todo resultado de uma aplicação do procedimento f a z segue x na sequência f.*

100



(19):

$$\begin{array}{c|l} b & (z \equiv x) \\ c & \neg\, \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ d & \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ a & (x \equiv z) \end{array}$$



(103

---

[d] Com respeito a esta última inferência, veja §6.

(55)::

$$\begin{array}{c|c} d & x \\ c & z \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} (x \equiv z) \\ \quad \neg\, \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \qquad (104$$

§30.

99

$$\vdash \left(\left(\begin{array}{l} (z \equiv x) \\ \quad \neg\, \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \right) \equiv \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(x_\gamma, z_\beta) \right)$$

(52):

$$\begin{array}{c|l} f(\Gamma) & \Gamma \\ c & \begin{array}{l} (z \equiv x) \\ \quad \neg\, \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \\ d & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \quad (z \equiv x) \\ \quad\quad \neg\, \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \qquad (105$$

(37):

$$\begin{array}{c|l} a & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ b & (z \equiv x) \\ c & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \qquad (106$$

Tudo o que seguir x na sequência f pertence à sequência f que começa com x.

106

$$\begin{array}{c|c} x & z \\ z & v \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(z_\gamma, v_\beta) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(z_\gamma, v_\beta) \end{array}$$

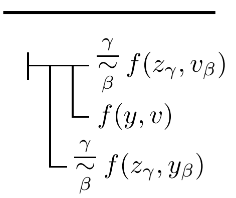
(7):

$$\begin{array}{c|l} a & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(z_\gamma, v_\beta) \\ b & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(z_\gamma, v_\beta) \\ c & f(y, v) \\ d & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(z_\gamma, y_\beta) \end{array}$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(z_\gamma, v_\beta) \\ \quad f(y, v) \\ \quad \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(z_\gamma, y_\beta) \\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(z_\gamma, v_\beta) \\ \quad f(y, v) \\ \quad \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\eqsim}} f(z_\gamma, y_\beta) \end{array} \qquad (107$$

(102)::

$$\begin{array}{c|c} x & z \\ z & y \end{array}$$



(108

Aqui apresentamos em palavras a derivação (108):

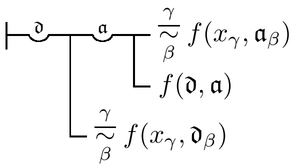
> Se y pertence à sequência f que começa com z, então por (102), todo resultado de uma aplicação do procedimento f a y segue z na sequência f. Donde, por (106), qualquer resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertence à sequência f que começa com z.

Portanto,

> *Se y pertence à sequência f que começa com z, então todo resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertence à sequência f que começa com z.*

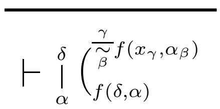
108

$$\begin{array}{c|c} v & \mathfrak{a} \\ z & x \\ y & \mathfrak{d} \end{array}$$



(75):

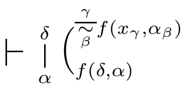
$$\begin{array}{c|c} F(\Gamma) & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, \Gamma_\beta) \end{array}$$



(109

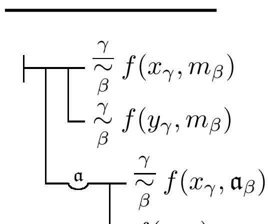
A propriedade de pertencer à sequência f que começa com x é hereditária na sequência f.

109



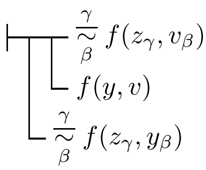
(78):

$$\begin{array}{c|c} F(\Gamma) & \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, \Gamma_\beta) \\ x & y \\ y & m \end{array}$$

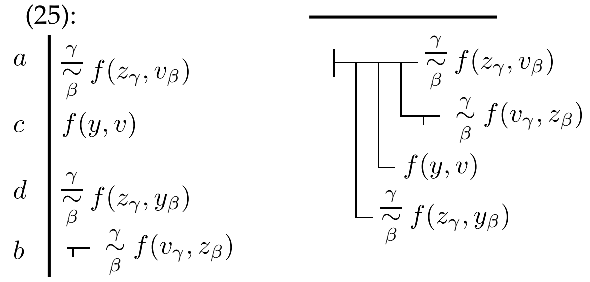


(110

108



(25):



(111

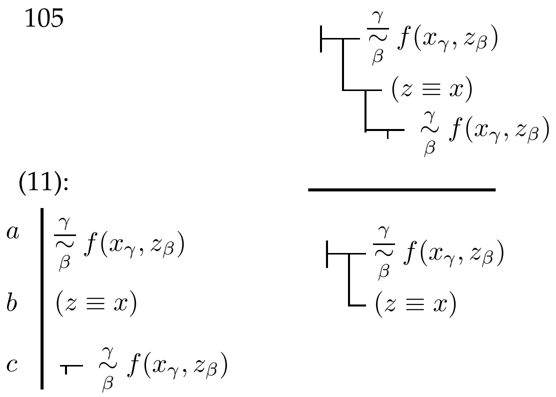
O que se segue é a derivação de (111) em palavras:

> Se y pertence à sequência f que começa com z, então por (108), qualquer resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertence à sequência f que começa com z.
>
> Portanto, qualquer resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertence à sequência f que começa com z, ou precede z na sequência f.

Portanto,

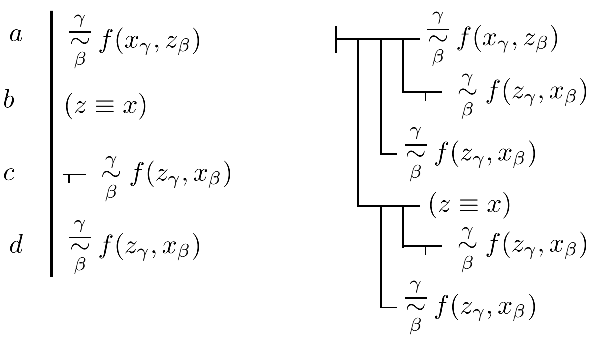
> *Se y pertence à sequência f que começa com z, então todo resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertence à sequência f que começa com z, ou precede z na sequência f.*

105



(112

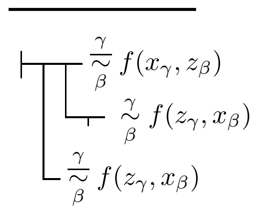
(7):



(113

(104)::

$$\begin{array}{c|c} x & z \\ z & x \end{array}$$



(114

Em palavras, a derivação desta fórmula é a seguinte:

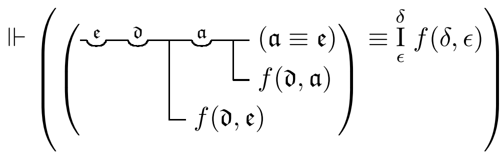
> Digamos que x pertença à sequência f que começa com z. Então, por (104), z é o mesmo que x; ou ainda, x segue z na sequência f.
>
> Se z é o mesmo que x, então, por (112), z pertence à sequência f que começa com x.

Das duas últimas proposições, segue-se que z pertence à sequência f que começa com x, ou x segue z na sequência f.

Portanto,

> *Se x pertence à sequência f que começa com z, então z pertence à sequência f que começa com x, ou x segue z na sequência f.*

§31.



(115

Traduzo

$$\underset{\epsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}}\, f(\delta, \epsilon)$$

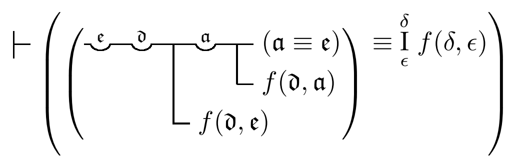
por "a circunstância de que o procedimento f seja unívoco (eindeutig)". Então, (115) pode ser assim expressa:

> *Se da circunstância de que $\mathfrak{e}$ é o resultado de uma aplicação do procedimento f a $\mathfrak{d}$, qualquer que seja $\mathfrak{d}$, pode se inferir que todo resultado de uma aplicação do procedimento f a $\mathfrak{d}$ é o mesmo que $\mathfrak{e}$[73],*

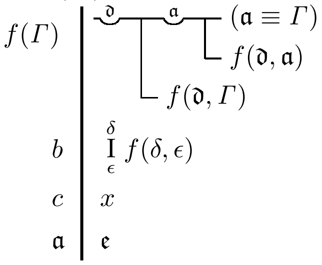
então digo:

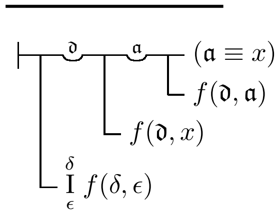
> "f é um procedimento unívoco".

115



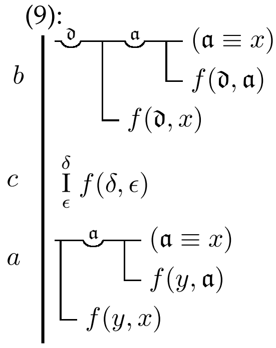
(68):

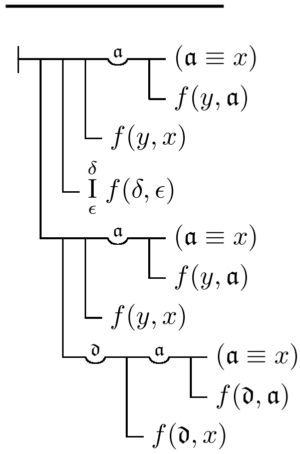




(116

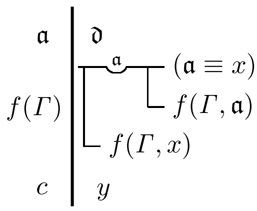
(9):

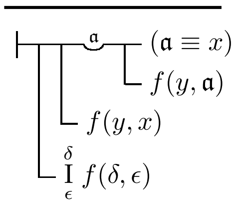




(117

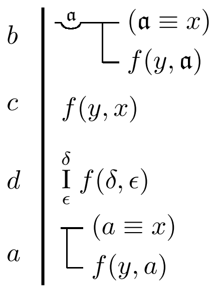
(58)::

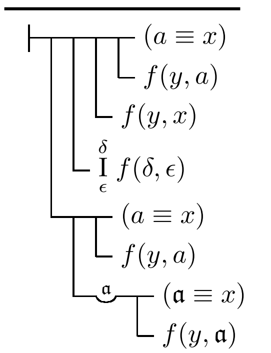




(118

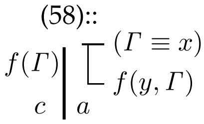
(19):

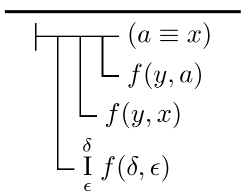




(119

(58)::

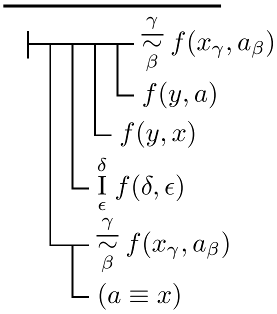




(120

(20):

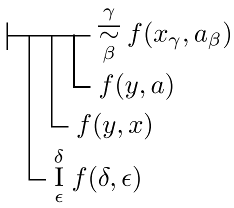
b	$(a \equiv x)$
c	$f(y,a)$
d	$f(y,x)$
e	$\underset{\epsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}}\, f(\delta,\epsilon)$
a	$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}}\, f(x_\gamma, a_\beta)$



(121

(112)::

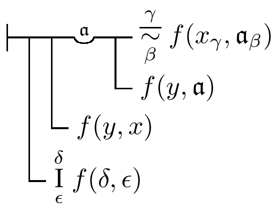
z	a



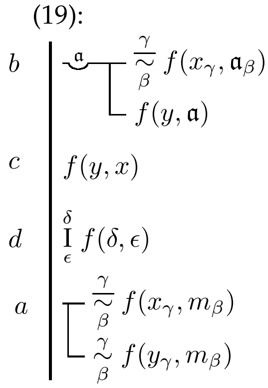
(122

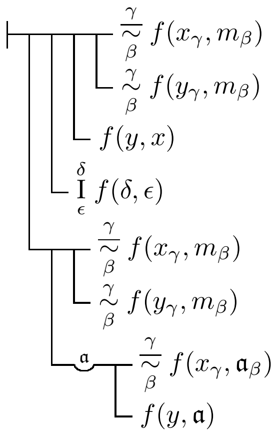
122

a	$\mathfrak{a}$



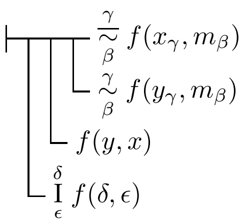
(19):





(123

(110)::



(124

Apresentamos aqui a derivação das fórmulas (122) e (124), em palavras.

Seja x o resultado de uma aplicação do procedimento unívoco f a y.

Logo, por (120), todo resultado de uma aplicação do procedimento f a y é o mesmo que x.

Portanto, por (112), todo resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertencente à sequência f que começa com x.

Portanto,

> *se x é o resultado de uma aplicação do procedimento unívoco f a y, então todo resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertence à sequência f que começa com x.* (Fórmula 122)

Digamos que m segue a y na sequência f. Assim, de (110) se deduz que:

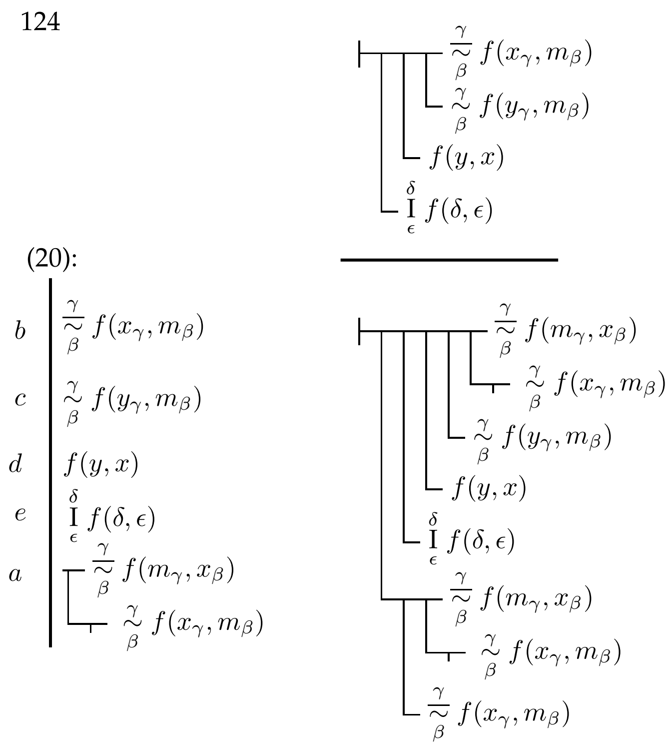
> se todo resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertence à sequência f que começa com x, então m pertence à sequência f que começa com x.

Isto, combinado com (122), mostra que:

> se x é o resultado de uma aplicação do procedimento unívoco f a y, então m pertence à sequência f que começa com x.

Assim,

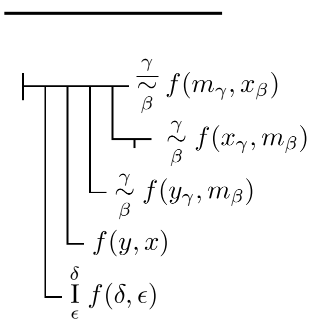
> *Se x é o resultado de uma aplicação do procedimento unívoco f a y, e se m segue y na sequência f, então m pertence à sequência f que começa com x.* (Fórmula 124)



(125

(114)::

x	m
z	x



(126

O que se segue é a derivação em palavras desta fórmula.

> Seja x o resultado de uma aplicação do procedimento unívoco f a y.
>
> Seja m seguindo y na sequência f.
>
> Então, por (124), m pertence à sequência f que começa com x.
>
> Consequentemente, por (114), x pertence à sequência f que começa com m, ou então, m segue x na sequência f.

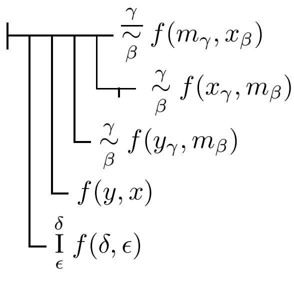
Isto também pode ser expresso do seguinte modo:

> x pertence à sequência f que começa com m, ou x precede m na sequência f.

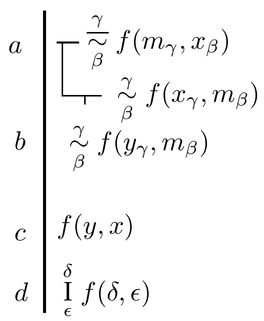
Portanto,

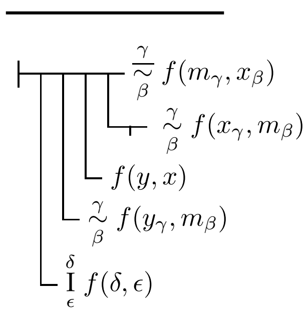
> *Se m segue y na sequência f e se o procedimento f for unívoco, então todo resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertence à sequência f que começa com m, ou precede m na sequência f.*

126



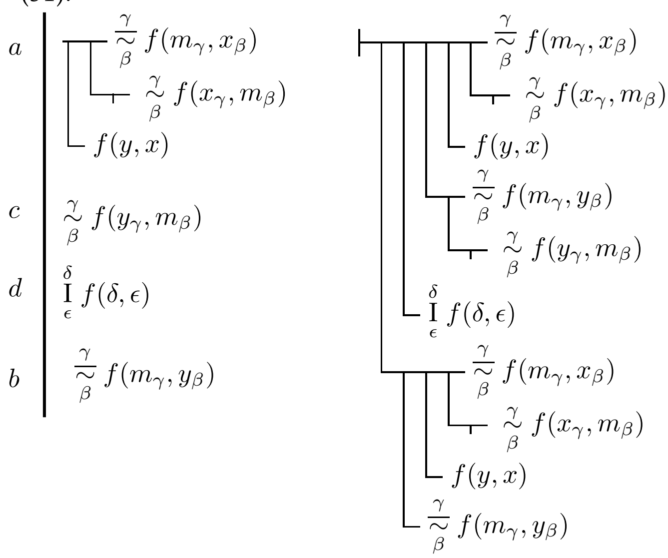
(12):





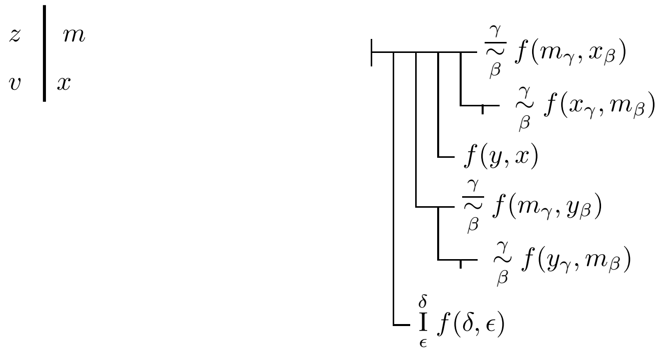
(127

(51):



(128

(111)::

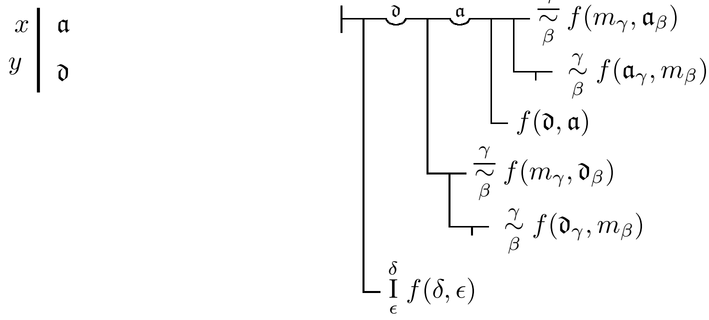


(129

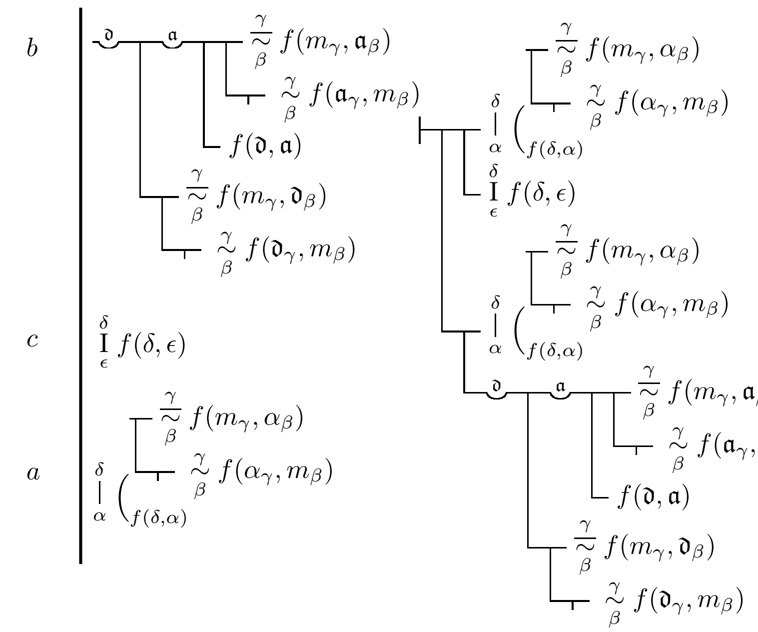
Em palavras, (129) pode ser lido do seguinte modo:

> *Se o procedimento f for unívoco, e se y pertence à sequência f que começa com m ou precede m na sequência f, então todo resultado de uma aplicação do procedimento f a y pertence à sequência f que começa com m, ou precede m na sequência f.*

129

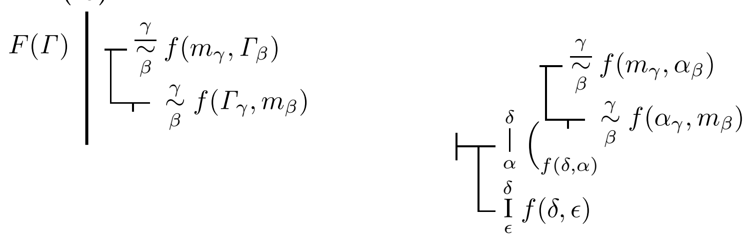


(9):



(130

(75)::

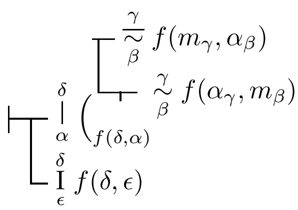


(131

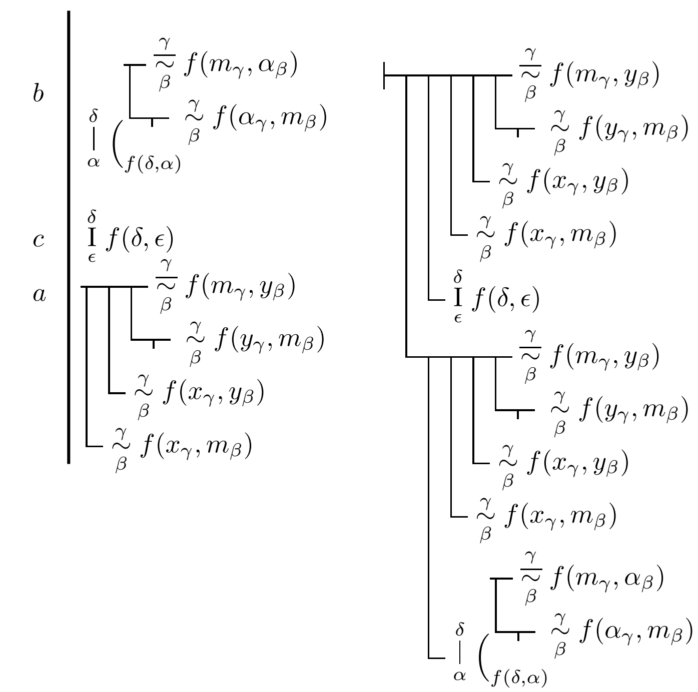
Em palavras, (131) é lido do seguinte modo:

> *Se o procedimento f for unívoco, então a propriedade de pertencer à sequência f que começa com m, ou de preceder m na sequência f é hereditária na sequência f.*

131

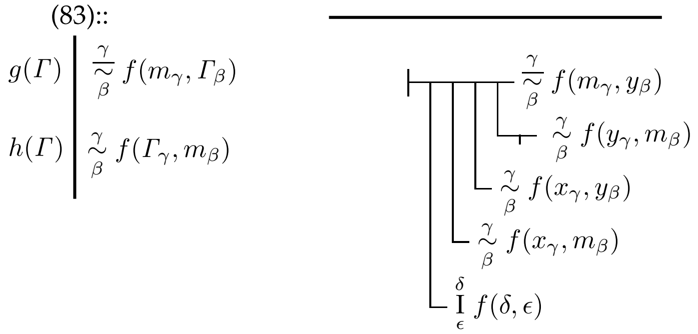


(9):



(132

(83)::



(133

Em palavras, esta proposição lê-se do seguinte modo:

> *Se o procedimento f for unívoco, e se m e y seguem x na sequência f, então y pertence à sequência f que começa com m, ou precede m na sequência f.*

Segue abaixo uma tabela que indica onde foi feito uso de uma fórmula na derivação de outra. Esta tabela pode ser usada para examinar os modos pelos quais uma fórmula foi empregada. A partir dela, pode-se também ver a frequência de aplicação de uma fórmula.

A coluna à direita encerra o número da fórmula para cuja derivação se empregou a fórmula cujo número é mencionado logo à esquerda[74]

1	3	7	67	12	16	21	44	44	45	59	—
1	5	7	94	12	24	21	47	45	46	60	93
1	11	7	107	12	35	22	23	46	47	61	65
1	24	7	113	12	49	23	48	47	48	62	63
1	26	8	9	12	60	24	25	47	49	62	64
1	27	8	10	12	85	24	63	48	101	63	91
1	36	8	12	12	127	25	111	49	50	64	65
2	3	8	17	13	14	26	27	50	51	65	66
2	4	8	26	14	15	27	42	51	128	66	—
2	39	8	38	15	88	28	29	52	53	67	68
2	73	8	53	16	17	28	33	52	57	68	70
2	79	8	62	16	18	29	30	52	89	68	77
3	4	8	66	16	22	30	59	52	105	68	116
4	5	8	74	17	50	31	32	52	75	69	70
5	6	8	84	17	78	32	33	53	55	69	75
5	7	8	96	18	19	33	34	53	92	70	71
5	9	9	10	18	20	33	46	54	55	71	72
5	12	9	11	18	23	34	35	55	56	72	73
5	14	9	19	18	51	34	36	55	104	72	74
5	16	9	21	18	64	35	40	56	57	73	87
5	18	9	37	18	82	36	37	57	68	74	81
5	22	9	56	19	20	36	38	57	100	75	97
5	25	9	61	19	21	36	83	58	59	75	109
5	29	9	117	19	71	37	106	58	60	75	131
5	34	9	130	19	86	38	39	58	61	76	77
5	45	9	132	19	103	39	40	58	62	76	89
5	80	10	30	19	119	40	43	58	67	77	78
5	90	11	112	19	123	41	42	58	72	77	85
6	7	12	13	20	121	42	43	58	118	78	79
7	32	12	15	20	125	43	44	58	120	78	110
79	80	89	90	98	—	106	107	114	126	124	125
80	81	90	91	99	100	107	108	115	116	125	126
81	82	90	93	99	105	108	109	116	117	126	127
81	84	91	92	100	101	108	111	117	118	127	128
82	83	92	102	100	103	109	110	118	119	128	129
83	133	93	94	101	102	110	124	119	120	129	130
84	98	94	95	102	108	111	129	120	121	130	131
85	86	95	96	102	104	112	113	121	122	131	132
86	87	96	97	104	114	112	122	122	123	132	133
87	88	96	102	105	106	113	114	123	124	133	—
88	95	97	98	105	112						

Notas

[1]Já que Frege toma, em seus primeiros escritos, a palavra *Satz* na sua acepção de sentença assertiva associada a um significado (ou pensamento), entendemos que, neste contexto inicial, cumpre traduzi-la por 'proposição' e não por 'sentença' (mera sequência de símbolos ou palavras de determinada linguagem capaz de expressar um pensamento) como o faremos mais adiante, sempre que for o caso.

[2]Frege distingue, em uma proposição, sua gênese (ou descoberta ou invenção) de sua prova (ou demonstração ou justificação). Esses dois tópicos cobrem, a seu ver, o que há de mais importante no que diz respeito a uma proposição.

[3]Quanto à prova ou demonstração de uma proposição geral, Frege distingue entre provas lógicas e provas empíricas, e assim dois são os métodos possíveis de serem seguidos. Um seria aquele que consiste em estabelecer demonstrações factuais e empíricas, enquanto que o outro seria aquele que procede de modo 'puramente lógico', sem qualquer referência à observação ou experimentos. Nesse sentido, Frege sustenta que todas as provas em aritmética devem ser puramente lógicas, assim rejeitando a concepção de J. S. Mill que admite que os conceitos e princípios da aritmética teriam um fundamento exclusivamente na experiência empírica ou sensorial (cf. Mill, 2002, III, 24; para uma crítica ao empirismo, cf. Frege, 1980b, §§7-9, onde ele explica a razão desta posição). Mas, para que seja possível elaborar provas puramente lógicas no âmbito das leis da aritmética, é necessário que os conceitos primitivos da aritmética sejam definidos em termos estritamente lógicos. E tais definições não podem se restringir apenas à noção de número, pois tudo aquilo que envolver a noção de ordem (como '=', '>', '<'), que é indispensável para a construção da axiomática, terá que ser definido, para evitar lacunas e intuições, em termos do que Frege denomina de 'pertinência a uma sequência' (*Conceitografia*, Terceira Parte). Importa ainda mencionar que a caracterização fregeana das proposições não é exaustiva, pois não dá conta das sintéticas *a priori*, o que poderia sugerir que Frege ainda não tinha aceitado a visão Kantiana em relação à geometria ou não compreendera o que são os juízos sintéticos *a priori* de Kant. Nos *Fundamentos da Aritmética*, §§3-4, esta lacuna é preenchida.

[4]O fato de os componentes de uma proposição terem uma origem sensorial ou empírica não impede que sua demonstração possa ser estritamente lógica.

[5]Não raramente, Frege emprega a palavra 'aritmética' de maneira vaga e imprecisa. Por vezes, ela é usada em seu sentido estrito, usual e elementar, envolvendo apenas as operações sobre os inteiros. Passagens há, porém, em que esta palavra assume um significado mais amplo, que abrange, além da aritmética em sentido estrito e elementar, operações sobre os racionais, irracionais e complexos. Finalmente, em certos textos, sob este nome se encontram em questão inclusive os cálculos diferencial e integral. Portanto, o termo 'aritmética' é tomado frequentemente por Frege em sentido mais amplo que o usual, vale dizer, envolvendo não só grandezas discretas, como também o contínuo e os complexos e, por vezes, até certos tópicos de análise.

[6]Ainda que não se possa dizer que se trata de uma definição em sentido próprio, a lógica é exatamente o estudo das 'leis do pensamento que transcendem a todas as particularidades'.

[7]Frege afirma que na elaboração da aritmética nada de intuitivo deve imiscuir-se no contexto de uma prova. Mas para que este princípio seja observado fielmente, importa suprimir toda lacuna (*Lücke*) na cadeia dedutiva de um teorema. Para evitar lacunas e intuições no desenvolvimento de uma prova, Frege exige que todo conceito e todo o princípio sejam explicitamente enunciados e, assim, que nada fique tácito ou implícito. Exige outrossim que toda inferência seja realizada de acordo com uma regra de dedução claramente estabelecida, que vincule a proposição derivada seja à(s) premissa(s) já estabelecida(s), seja a outra sentença previamente derivada (Cf. G. Frege, *Justificação*).δ

[8]O termo *Begriffsschrift* já fora, antes de Frege, usado por A. Trendelenburg. Em Frege, ele ocorre pela primeira vez em 1879 em sua *Conceitografia*. Mais tarde, porém, Frege parece ter-se arrependido de ter empregado este termo.

> Não parto de conceitos para com eles construir pensamentos ou proposições; pelo contrário, obtendo os componentes de um pensamento pela decomposição do pensamento. Sob este aspecto, minha conceitografia difere das criações similares de Leibniz e seus sucessores — apesar de seu nome, o qual eu talvez não tenha escolhido muito adequadamente (Fragmento de 26 de julho de 1919, cf. Heijenoort, 1967, p. 1, nota b).

Etimologicamente falando, trata-se de uma palavra composta do substantivo *Begriff* que significa noção ou conceito, e de *Schrift* que sugere as palavras 'grafia' ou 'escrita'. Portanto, em sua origem, *Begriffsschrift* significa algo como escritura conceitual ou grafia de conceito. Um problema complicado que esta palavra origina é de como traduzi-la, mediante um único vocábulo, sem com isto desfigurar seu significado original.

Este termo foi traduzido inicialmente por Peano pelo termo italiano *ideografia* (G. Peano [Dicionário]: Parte I); mais recentemente, Mangione, Egidi e Trinchero também se valem da palavra italiana *ideografia* (Mangione, 1977 ; Egidi, 1963; Trinchero, 1967). Posteriormente, Joudain emprega o termo *ideography* e, diga-se de passagem, com a aprovação do próprio Frege (Jourdain, 1911-12). Em espanhol, Mourlines e Gómez-Lobo traduziram por *ideografia* (Mourlines, 1971, p. 70; Gómez-Lobo, 1972, p. 64). A tradução francesa de Imbert, e Largeault, também empregam *ideographie* (Imbert, 1971, Introducão; Largeault, 1970]). Em língua portuguesa também foi utilizada a palavra 'ideografia' (Alcoforado, 1978).

Paralelamente a essa solução, há autores que preferiram seguir uma alternativa plurivocabular que, em nosso entender, se afigura pouco adequadas ou felizes. Assim, Austin, em sua tradução dos *Grundlagen der Arithmetik,* usa a locução *concept writing* (Frege, 1980b, p. 92); Nidditch verte por *idea-writing* (Nidditch, 1966, p.: 62); Kneebone traduz por *concept-script* (Kneebone, 1965, p. 173); Bynum emprega a expressão *conceptual notation* (Frege, 1972); Kluge traduz por *conceptualy perpspicuous notation* (Kluge, 1971, p. XIV, nota 3)).

Uma terceira vertente prefere, no entanto, a palavra 'conceitografia' para traduzir *Begriffsschrift*. Com efeito, a tradução mexicana de Padilla emprega o termo *conceptografia* (Padilla, 1972); mais tarde em português, Santos empregou o termo *conceitografia* (Frege, 1980c). Atualmente, também entendemos que esta seja a tradução mais fiel e adequada para este vocábulo (cf. Alcoforado, 2009). Por tal razão, esta foi a solução aqui seguida.

[9]No contexto da lógica e da filosofia do conceito, o termo *Merkmal* é tradicionalmente traduzido pelo substantivo 'nota'. Em sentido amplo, nota é tudo aquilo pelo qual uma coisa pode ser determinada, conhecida ou distinguida de outra(s) coisa(s). Em decorrência disso, nota seria a qualidade essencial de algo, ou então as qualidades estritamente acidentais (ditas 'notas individuais' ou 'notas individuantes') de algo (Grooten & Steenbergen, 1972, s. v. Note). Em sentido lógico, notas de um conceito são os componentes desse conceito (isto é, as determinações pelas quais um conceito se distingue do outro) e ainda as propriedades dos objetos que caem sob esse conceito. Assim, o conceito de número inteiro negativo tem como notas: número, inteiro e negativo; tais notas são também as propriedades de cada um dos inteiros menores que zero.

[10]Trendelenburg assinala que o projeto leibniziano de uma linguagem universal remontaria a Lúlio, Kircher, Becher, Delgarno e Wilkins. Ele também nos lembra das considerações de Descartes de que 'a invenção de tal linguagem depende de uma filosofia verdadeira'. Mas no entender de Trendelenburg, nenhum desses projetos chegou a um termo satisfatório por carecer de uma adequada teoria do conceito (cf. Trendelenburg, 1846-1967, p. 3ss).

[11]Aqui nos é dito que sua conceitografia não só é capaz de vir a abranger domínios distintos e separados do conhecimento, como também está aberta para acréscimos e ampliações no sentido de torná-la apta para assimilar outros domínios sempre que as noções de dedução e prova estiverem em questão.

[12]Diversas linhas de investigação foram conduzidas sob a rubrica de *analysis situs*, termo criado por Leibniz. Ao que parece, foi Leibniz (1679) o primeiro, e depois L. Euler (1735), com o problema das sete pontes sobre o rio Pregel, os que deram início a esse ramo da matemática. Mas, na verdade, devemos a A. F. Möbius (1840), um aluno de Gauss, as primeiras investigações 'topológicas' realmente efetivas. Sabemos que Möbius e, de modo mais aprofundado, F. Guthrie e A. de Morgan levaram adiante a questão que se tornou conhecida sob o nome de o problema do mapa. Este problema, ainda hoje não resolvido, consiste em mostrar que se pode colorir qualquer mapa plano de um número finito de países com apenas quatro cores, de tal modo que não existam dois países que tenham uma fronteira em comum pintados com a mesma cor. Mais tarde, em 1858, ele descobriu a superfície conhecida pelo nome de 'banda de Möbius'. É de se cogitar que Frege, ao aproximar a noção de *analysis situs* de sua conceitografia, teria talvez em mente a questão de 'associar sob uma única linguagem formular domínios até então separados, e ainda no sentido de ampliá-la a ponto de incluir áreas que até então tinham escapado a essa linguagem', como lemos acima.

[13]Frege aqui se refere à cinemática pura.

[14]Nessa passagem, a oposição 'conceitografia/lógica' sugere que a palavra 'lógica' significa 'lógica tradicional de origem aristotélica', ou ainda 'álgebra de Boole-Schröder'.

[15]Na *Conceitografia*, o termo 'conceito' (*Begriff*) é empregado no sentido corrente de 'noção' ou 'ideia geral'. Mas, nessa passagem nos é dito que a apreensão de 'um conteúdo como uma função de um argumento leva a formação de conceitos'. Tal afirmação, porém, não passa de um mero prenúncio, pois só mais tarde, em *Função e Conceito* (1891), o termo 'conceito' virá a assumir o sentido técnico de 'função de um único argumento cujo valor é sempre um valor de verdade, e cujo percurso de valor é a extensão desse conceito'.

[16]Trata-se da conhecida regra de dedução *modus ponens*, que Frege denomina de 'regra de separação'.

[17]Frege admite que se combine a fórmula (31) com a (41) a fim de dar origem à seguinte identidade

$$\vdash (\neg\!\neg\, a \equiv a)$$

com o fito de simplificar certas inferências (*Conceitografia*, p. 20). Note, porém, que esta fórmula, não é apresentada como um axioma, nem pode ser derivada como teorema de seu sistema (Cf. para detalhes, Duarte, 2009, Apêndice 1). Ver ainda nota 59.

[18]Frege acena para um conjunto de artigos, mas sobretudo para seu livro *Fundamentos da Aritmética* (1884), cuja publicação só se deu cinco anos após o aparecimento da *Conceitografia* (1879). Mas, ao que parece, já em 1882, bem antes da publicação das *Leis Fundamentais*, Frege tinha grande parte da derivação das leis básicas da aritmética, pois em carta a Anton Marty (29/8/1882), escreve:

> Permita-me dar-lhe mais algumas informações sobre a minha Conceitografia na esperança de que o Sr. tenha talvez a oportunidade de chamar a atenção sobre ela

> em alguma revista; o que viria facilitar a publicação de outros trabalhos. Estou prestes a completar um livro em que trato do conceito de número e demonstro que os primeiros princípios das operações numéricas [Zählen der Zahl, literalmente 'contar números'] até agora tidos como axiomas indemonstráveis, podem ser provados a partir de definições por meio apenas das leis da lógica, de forma que eles poderiam ser considerados juízos analíticos em sentido Kantiano. (G. Frege, 1980a, pp. 99-100; G. Frege, 1976, pág.163)

À primeira vista, pode-se pensar que o livro mencionado na carta é *Os Fundamentos da Aritmética*. Contudo, outra passagem da carta leva-nos crer que tal livro foi escrito na linguagem conceitográfica:

> Julgo difícil ter acesso às revistas filosóficas. Por favor, desculpe-me por esta carta que nasce de uma necessidade não atendida de comunicação. Encontro-me, de fato, em um círculo vicioso: antes que as pessoas deem atenção a minha Conceitografia, elas querem ver o que ela pode fazer e, de minha parte, não posso mostrar o que querem sem antes pressupor familiaridade com ela. Assim, parece que dificilmente poderei contar com qualquer leitor para o livro que mencionei no início (G. Frege, 1980a, pág. 102; G. Frege, 1976, pág. 165).

Importa também mencionar a carta de Stumpf a Frege (9/9/1882). Trata-se de uma resposta à carta de Frege a Marty, embora não saibamos porque Stumpf a enviou. Uma possível hipótese seria a de que Frege enviou cartas de mesmo teor tanto a Marty como a Stumpft. Sabemos que nessa época ambos lecionavam na Universidade de Praga. Mas não se deve descartar a hipótese de ter Prof. Katkov incorrido em erro ao comunicar a Scholz que a carta de Frege fora dirigida a Marty. A quem quer que fosse endereçada a missiva de Frege, é consenso que a carta de Stumpf é uma resposta àquela e nela vemos a seguinte passagem bastante sugestiva:

> Em relação ao seu trabalho [o livro mencionado na carta a Marty], o qual aguardo com vivo interesse, por favor não se ofenda se eu lhe perguntar se não seria mais apropriado explicar sua linha de raciocínio de início em linguagem corrente e só depois, conceitograficamente — em separado, numa outra ocasião, ou então neste mesmo livro. Isto contribuiria, acredito, para uma recepção mais favorável de ambos os relatos (G. Frege, 1980a, pág. 172; G. Frege, 1976, pág. 257).

Frege seguiu a sugestão do Stumpf publicando em linguagem corrente *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) que, de acordo com o contexto acima, serviria como uma espécie de introdução ao livro de 1882 escrito em linguagem rigorosamente conceitográfica. Isto leva a uma séries de indagações: por que Frege não publicou este livro mancionado na carta a Marty logo após a publicação dos Fundamentos? O tal livro mencionado na carta a Marty já teria uma teoria das extensões? Frege já teria introduzido o axioma V? E se tivesse introduzido, por que tal fato não é mencionado nos Fundamentos? Para um aprofundamento de todas estas questões, cf. Duarte, 2009.

[19]Na *Conceitografia*, a noção de sinal (*Zeichen*, *Bezeichnung*) é utilizada de uma das duas seguintes maneiras: i) Sinais que exercem a função de constantes, isto é, sinais cujo sentido é 'totalmente determinado' e designam objetos bem definidos (*Conceitografia*, §1). Tal é o que se dá, em aritmética, com '0', '$\sqrt{2}$' , etc; em lógica, com '$\rightarrow$', '$\neg$', etc. Como Frege não lhes dá uma denominação especial, Largeault veio a chamá-los de 'não-letras' (Largeault, 1970, p. 101); ii) Sinais que servem 'para expressar a validade universal de proposições' (*Conceitografia*, §1). Isto é o que se observa com as letras a, b, c que ocorrem na igualdade $(a + b)c = ac + bc$. Tais sinais, Frege denomina de 'letras' (*Buchstaben*) e não de 'variáveis' (*Veränderlich*), já que ele faz sérias restrições a esta palavra, por elas ensejarem, erroneamente, que se trata de algo que varia. Assim, em lugar de 'variável', ele utiliza 'letra'. Eis como ele se manifesta a esse respeito: 'Não seria o caso de se omitir inteiramente esta expressão ['variável'], já que dificilmente seria possível defini-la de maneira adequada?' (Jourdain, 1911-12, p. 238). Sabemos que Frege foi quem primeiro submeteu a noção de variável a uma análise rigorosa (cf. 'Que é uma função?', in: Alcoforado, 2009, pp. 195-206).

[20]Esta é uma das expressões de que Frege se serve como substitutivo para a palavra 'lógica'.

[21]Frege não esclarece de forma satisfatória o que entende por *Urteil*, tradicionalmente traduzido como 'juízo'. Uma análise preliminar dessa noção envolve os seguintes aspectos. Em primeiro lugar, no juízo importa distinguir a cadeia gráfica ou sonora de seu conteúdo significativo. O presente texto enseja, por vezes, que o juízo seria ora o conteúdo, ora a cadeia gráfica acoplada ao conteúdo. O conteúdo de um juízo é, por Frege, denominado de 'conteúdo asserível'. Com efeito, todo conteúdo de um juízo é necessariamente asserível ou então não é o conteúdo de um juízo. Segundo Frege, um juízo é um conteúdo asserido, vale dizer, um conteúdo asserido como verdadeiro ou falso. Para indicar que um conteúdo é asserível, Frege fixa a seguinte notação

$$— 2 + 2 = 4.$$

Portanto, só conteúdos asseríveis podem receber essa barra horizontal. Desse modo, não faz sentido escrever '— 2' ou ' — casa', já que nem 'casa' nem '2' são ou encerram conteúdos asseríveis. Em segundo lugar, cabe esclarecer quando um conteúdo de juízo é ou não asserido. Assim, '2 > 3' encerra um conteúdo de juízo que alguém pode se recusar a asserir para não se envolver em uma falsidade. Quando um conteúdo de um juízo — digamos, '$3 > 2$' — é asserido, nota-se este fato da seguinte maneira:

$$\vdash 3 > 2.$$

A expressão acima, *além* de estabelecer que '$3 > 2$' encerra um conteúdo asserível (isto é, $— 3 > 2$), exprime também que esse conteúdo foi de fato asserido. Tal é a função do traço vertical instalado na extremidade esquerda do traço de conteúdo.

[22]Na *Conceitografia*, é lançada a distinção entre juízo e conteúdo. Mas nem todas as expressões conceitográficas são juízos e, assim, nem todos os conteúdos são conteúdos de juízos. O conteúdo de um juízo é descrito como uma combinação de representações (*Vorstellungsverbindung*), que é 'combinada [...] em um todo' por um traço horizontal anteposto ao sinal que a expressa. Assim,

$$— A$$

indica que a totalidade dos sinais A não expressa um juízo, mas uma combinação de representações que constitui um conteúdo asserível.

[23]Uma noção de grande importância para Frege é a de *beurtheilbarer Inhalt*, cuja tradução literal seria algo como 'conteúdo judicável'. Mas esta expressão alemã tem o inconveniente de ser por demais ampla, uma vez que sempre se pode formular um juízo sobre qualquer conteúdo e, assim, inexistem conteúdos que sejam especificamente judicáveis. Tal dificuldade inerente à construção alemã se propagou, em maior ou menor intensidade, para todas as traduções de que temos conhecimento. Com efeito, esta expressão foi traduzida dos seguintes modos. Jourdain traduziu-a por 'conteúdo judicável' (*judicable content*); Mangione também se valeu da locução 'conteúdo judicável' (*contenuto giudicabile*); Russell por 'conteúdo proposicional' (*propositional content*); Imbert por 'conteúdo de juízo possível' (*contenu de jugement possible*); Geach por 'conteúdo possível de juízo' (*possible content of judgement*); Bauer-Mengelberg por 'conteúdo que pode se tornar um juízo' (*content that can become a judgement*); Bynum por 'conteúdo asserível' (*assertible content*); Largeault por 'conteúdo de juízo' (*contenu de jugement*). Aqui, sugerimos a solução de Bynum e, assim, traduzimos o termo fregeano *beurtheilbarer Inhalt* por 'conteúdo asserível'. Para contornar a dificuldade acima assinalada, a solução que deslumbramos é utilizar uma dessas traduções associada à explicação detalhada do que quer Frege dizer quando usa a locução *beurtheilbarer Inhalt*.

De início, por não serem asseridos, os conteúdos asseríveis constituem os conteúdos conceituais dos juízos. Tais conteúdos são os únicos que podem ser asseridos e, consequentemente, os únicos aptos a se tornarem uma asserção e, por extensão, um juízo. Para indicar que uma expressão encerra um tal conteúdo, prefixa-se esta expressão com o traço de conteúdo, como se vê em '$— 2 + 2 = 4$'. A ausência desse traço diante de uma expressão significa que o conteúdo da expressão não é asserível, como '2' ou '$\sqrt{3}$'. Quando um conteúdo asserível é objeto de uma asserção, usa-se então o traço de juízo, como em '$\vdash 2 + 2 = 4$'. Na *Conceitografia*, esta noção não é objeto de nenhum aprofundamento. Mais tarde, Frege distinguirá o aspecto intensional, que ele denominará de pensamento (*Gedanke*), do aspecto extensional, que recebe as designações, segundo as circunstâncias, de referente ou de valor de verdade.

[24]Nem todo conteúdo veiculado por uma expressão é de interesse conceitográfico. Especificamente, a conceitografia só se interessa pelo conteúdo conceitual (*begriffsschriftlich Inhalt*) das expressões. Assim, dois juízos cuja única distinção consiste na ordem de ocorrência das palavras e talvez em intenções de ordem psicológica, mas dos quais sempre se seguem as mesmas conclusões lógicas, são ditos, por Frege, terem o mesmo conteúdo conceitual. Este é, portanto, o significado que as inferências lógicas envolvem ou supõem. Um conteúdo conceitual é um conteúdo proposicional, pois a conceitografia se interessa primariamente por proposições e só secundariamente por conceitos.

[25]Na *Conceitografia*, Frege não chega a formular a noção de valor de verdade. Deste modo, para distinguir uma proposição verdadeira de uma falsa, ele emprega as expressões '... é afirmado' ou '... é negado' ou '... é um fato' ou ainda '... não é um fato' (*Conceitografia*, §3). Ele ainda afirma que a proposição p pode sempre ser posta sob a forma 'p ser o caso é um fato'. Com isso, 'o sujeito encerraria todo conteúdo [...] e só haveria um único predicado 'é um fato' para todos os juízos' (Conceitografia, §3). E assim não são empregadas as expressões '... é verdadeiro' ou '... é falso', embora haja quem considere aquelas expressões meros equivalentes sinonímicos destas últimas (cf. Imbert, 1971, p. 39). Qualquer que seja a solução, é inequívoco que tais expressões representam um predicado específico de proposições. Como se sabe, Frege posteriormente tratará a verdade, ou melhor, o verdadeiro, de forma bem diferente.

[26]Na *Conceitografia*, a palavra *Satz* pode, por vezes, ser traduzida por 'proposição', quando esta última palavra assume a acepção de significado expresso por uma sentença, ou de conteúdo asserível. Mas a palavra *Satz* nem sempre é, nesta obra, usada de modo tão unívoco que só deva ser traduzida por um único termo em português. Com efeito, há passagens em que *Satz* assume o sentido técnico da palavra 'sentença'.

[27]Frege expõe aqui sua classificação dos juízos. Duas coisas há a ressaltar. Em primeiro lugar, sua originalidade em relação às teorias da lógica clássica ou tradicional. Há em Frege um impulso novo que ficará como uma conquista da

lógica moderna. Em segundo lugar, no entender de Frege, a classificação tradicional não versa sobre a forma, mas sobre o conteúdo do juízo. Eis como ele interpreta a classificação tradicional do juízo quanto à quantidade e à qualidade.

Quanto à quantidade, ele distingue dois tipos de juízos: o universal (*allgemeine*) e o particular (*besondere*). Mas ele logo acrescenta que 'isto não é propriamente uma distinção entre juízos, mas entre conteúdos. Dever-se-ia dizer: 'um juízo com um conteúdo universal' e 'um juízo com um conteúdo particular' (*Conceitografia*, §4).

Quanto à qualidade, o mesmo se dá. Pois, segundo Frege, tanto a negação, como a afirmação, versam sobre o conteúdo e não sobre a forma do juízo. Para ilustrar, Frege discute o seguinte exemplo. Suponha que os segmentos AB e CD não sejam iguais. Tal enunciado, diz ele, sugere a seguinte reflexão: 'Aqui, o conteúdo de que os segmentos AB e CD não sejam iguais contém uma negação; mas este conteúdo, embora pudesse vir a ser um juízo, não é, contudo, apresentado como um juízo' (*Conceitografia*, §4). Disso ele conclui que a negação se dá no conteúdo, quer este conteúdo se apresente ou não como um juízo.

Há quem diga que o exíguo número de linhas que Frege consagra à classificação dos juízos da lógica tradicional, discutida ao longo do parágrafo 4, dá uma ideia da pouca importância que ele devota a esta questão. Em nosso entender, tal opinião não é, em absoluto, verdadeira. Em primeiro lugar, porque Frege, nesta obra, manifesta-se sobre os mais diversos assuntos sempre de modo breve e conciso. Em segundo lugar, porque sendo suas considerações claras e transparentes, carecem de maiores explicações e desenvolvimentos.

[28]Frege observa que a distinção tradicional entre os diversos tipos de juízo é apenas uma convenção da gramática da linguagem corrente. 'A distinção dos juízos em categóricos, hipotéticos e disjuntivos, parece-me ter tão somente um significado gramatical' (*Conceitografia*, §4). Isto nada mais é do que outra forma de dizer que eles são logicamente irrelevantes, em que um sempre pode ser reescrito em termos dos demais. Esta afirmação permite duas interpretações. Thiel a entende da seguinte maneira: 'Os conteúdos podem ser conectados por "ou" ou por "se ... então" sem importar como os conteúdos em si mesmos são compostos' (Thiel, 1968, p. 13). Em outras palavras, as expressões 'A ou B' ou 'se A, então B' etc. independem da natureza de A ou B. Em nosso entender, esta interpretação não retrata com fidelidade o pensamento de Frege. O que ele quer aqui expressar quando diz que tais conectivos são convenções gramaticais, é apenas o fato de eles serem intertradutíveis, ou melhor, de entre eles existir uma forma de equivalência. Assim, a disjunção '$A \vee B$' é equivalente ao condicional '$\neg A \rightarrow B$' e a outras formas de juízo. Logo, a distinção entre uma proposição disjuntiva e um condicional é uma questão antes classificatória.

[29]As letras maiúsculas que aqui vemos — que podem ser denominadas de 'letras ou variáveis proposicionais' — foram retiradas não do alfabeto latino, mas do alfabeto grego - A, B, Γ, Φ, Ψ e X. Tais letras gregas são utilizadas quando se objetiva indicar indefinidamente uma expressão. Elas atuam, falando de maneira mais precisa, como variáveis metamatemáticas ou variáveis sintáticas ou metavariáveis. Elas designam de modo ambíguo expressões do cálculo (expressões estas que são escritas com letras latinas minúsculas). As letras gregas maiúsculas são ditas referirem-se a um conteúdo asserível e não a valores de verdade, já que Frege, na época da redação dessa obra ainda não tinha formulado esse conceito.

[30]A fim de correlacionar dois conteúdos asseríveis A e B, Frege considera os quatro seguintes casos (*Conceitografia*, §§5 e 7; Id., 'Sobre a Finalidade de uma Conceitografia'):

i) A é afirmado e B é afirmado

ii) A é afirmado e B é negado

iii) A é negado e B é afirmado

iv) A é negado e B é negado

que podem ser simbolizados da seguinte maneira:

i) $A \wedge B$

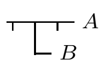
ii) $A \wedge \neg B$

iii) $\neg A \wedge B$

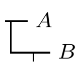
iv) $\neg A \wedge \neg B$

Com base nesses quatro casos, Frege fixa de modo preciso e inequívoco o significado dos conectivos proposicionais de que se serve. Aparentemente, na *Conceitografia*, apenas dois conectivos são tomados como primitivos: a implicação e a negação. A partir destes são definidas:

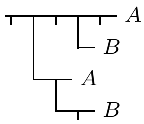
i) a conjunção



ii) a disjunção inclusiva



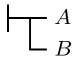
iii) a disjunção exclusiva



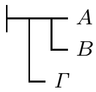
Como Frege se vale dos quatro casos acima para definir a condicionalidade, cabe indagar se, no fundo, para ele, os conectivos primitivos não seriam a negação e a conjunção.

[31]O traço de condição, isto é, o implicador, é o conectivo binário primitivo da conceitografia. Observa Frege que em seu lugar poderia ser usado o conjuntor. Não o fez, porém, porque ele propicia uma regra de inferência mais simples e intuitiva (*Conceitografia*, §6 *in fine* e §7).

A implicação é introduzida ao estabelecer as relações lógicas que se dão entre a conjunção e a negação. Com efeito, dos quatro casos acima aludidos, Frege destaca o terceiro '(não-A e B)' e o nega, obtendo a expressão 'não(não-A e B)', que ele simboliza por

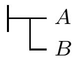


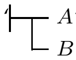
O que é essencial à condicionalidade, observa Frege, é nunca ocorrer o caso em que B é verdadeiro e A é falso. Note-se que, na condicionalidade, o aumento do conteúdo do juízo não altera as suas propriedades lógicas. Assim,

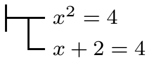


nega o caso em que A é negado e B e Γ são afirmados. Se uma relação causal se der, A será uma consequência necessária de B e Γ. Em notação mais recente, teríamos $\Gamma \to (B \to A)$. Como vimos, ao explicar o significado do traço de condição, Frege se utiliza de algo que equivale basicamente ao método de tabelas de verdade (cf. Church, 1967, p. 161-162).

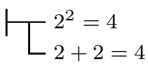
[32]Se A e B forem conteúdos asseríveis, então a expressão 'não(B e não-A)' é simbolizada por



Mas, se '' for asserido e se desconhecemos o valor de verdade de A e de B, pode-se traduzir '' pela expressão 'Se B, então A'. A razão disto, porém, torna-se clara mediante o exame da seguinte expressão:

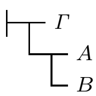


Pela fórmula 'não(B e não-A)', a expressão acima nega o fato de que x^2 não seja igual a 4, quando $x + 2$ seja igual a 4. O que pode ser traduzido nos seguintes termos: Se $x + 2 = 4$, então $x^2 = 4$. Esta tradução, diz Frege, exibe a importância da relação contida no sinal de condição. Pois o juízo hipotético é a forma comum a todas as leis da natureza e a todas as conexões causais em geral. A linguagem corrente não permite que se traduza este sinal em todos os casos por 'se'. Ela o admite no único caso em que uma parte do conteúdo, no caso presente x, for indeterminada e assim confere generalidade ao todo. Se substituirmos x por 2, não será adequado traduzir



por 'se $2 + 2 = 4$, então $2^2 = 4$' (cf. Frege, 'Sobre a Finalidade de uma Conceitografia').

[33]O condicional



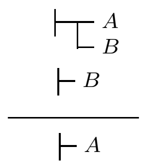
segundo escreve Frege, 'nega o caso em que B é afirmado, mas A e Γ são negados'. Há aqui um equívoco por parte de Frege, pois o condicional acima, na verdade, nega o caso em que '$B \to A$' seja afirmado e Γ seja negado; e, por sua vez, '$B \to A$' nega o caso em que B seja afirmado e A seja negado. Portanto, o condicional acima nega os casos em que ou i) B, A e Γ são negados, ou ii) A é afirmado, B e Γ são negados, ou iii) B e A são afirmados e Γ é negado.

[34]Frege aqui introduz a regra de dedução tradicionalmente conhecida como *modus ponens* e que, mais tarde, será também denominada de 'regra de separação'. Sejam A e B letras gregas maiúsculas. Dado o juízo '$B \to A$' e o juízo B, pode-se

inferir o juízo A. Também aqui Frege se vale da matriz para justificar esta regra, já que as premissas '$B \to A$' e 'B' só são compatíveis conjuntamente com a primeira linha da matriz, a saber, '$A \wedge B$'. Com efeito, '$B \to A$' é equivalente à negação da terceira linha '$B \to A \leftrightarrow \neg(B \wedge \neg A)$'. Portanto, '$B \to A$' é incompatível com '$B \wedge \neg A$'. Por outro lado, a segunda premissa B é incompatível com a segunda e a quarta linhas da matriz. Consequentemente, só '$A \wedge B$' é simultaneamente compatível com as premissas deste juízo — pela regra de eliminação da conjunção — tanto se pode inferir A como B; mas como B é uma premissa, só cabe inferir A.

[35]Se realizadas em todas as etapas, as demonstrações formais são, com frequência, procedimentos longos que se desdobram em um grande número de passos. Para encurtar o comprimento de uma demonstração formal, regras não-criativas (não-primitivas) são introduzidas. Mas tal fato não oferece nenhuma dificuldade, uma vez que as regras não-criativas são, em princípio, dispensáveis, pois só realizam o que pode ser executado com as regras primitivas ou criativas do sistema formal. Por tal razão, Frege foi levado a introduzir uma regra não-criativa cujo objetivo é diminuir o número de passos em uma demonstração formal (*Conceitografia*, §6). Infelizmente, ele não foi explícito quanto às convenções de que se serve. Por isso, nossas considerações são meras generalizações oriundas dos usos e práticas do que é dado observar.

De modo geral, em uma demonstração, os juízos que se encontram acima do traço de inferência são as premissas, enquanto que o juízo que se encontra abaixo desse traço é a conclusão. Para diminuir o número de passos de uma demonstração, Frege introduz dois dispositivos notacionais que afetam o traço de inferência, vale dizer, o traço horizontal que separa as premissas da conclusão. Os dispositivos notacionais de que ele se vale são, graficamente falando, números e pontos, que devem ser colocados do lado esquerdo do traço de inferência. Assim, na demonstração



o número de premissas pode ser reduzido, segundo o artifício fregeano, obedecendo-se a seguinte convenção: associa-se um número à direita da primeira ocorrência do juízo que se encontra no contexto da demonstração e, assim, não mais se utiliza esse juízo, mas esse número, que passa a ser escrito à esquerda do traço de inferência. Por exemplo, a demonstração

$$\begin{array}{l} B \to A \\ B \\ \hline A \end{array}$$

pode ser abreviada de duas maneiras seja pela supressão da primeira premissa, desde que se associe um número, digamos (X), a essa premissa

$$\begin{array}{ll} B \to A & \quad \text{(X)} \\ B & \\ \hline A & \end{array}$$

originando assim

$$\text{(X):} \quad \begin{array}{l} B \\ \hline A \end{array}$$

Mas a demonstração

$$\begin{array}{ll} B \to A & \\ B & \quad \text{(XX)} \\ \hline A & \end{array}$$

pode ainda ser abreviada, agora pela supressão da segunda premissa, do seguinte modo:

$$(XX):: \quad \frac{B \to A}{A}$$

Como os exemplos acima revelam, usam-se: i) dois pontos, se o juízo numerado (e, portanto, suprimido) for aquele que encerra o condicional; e ii) quatro pontos, se o juízo numerado (e, portanto, suprimido) for o que encerra o antecedente do condicional.

Mas há uma situação em que as regras anteriores não resolvem. Seja o seguinte contexto

$$(XX):: \quad \frac{B \to A}{A}$$

Se a ela acrescentarmos, por uma razão qualquer, um novo juízo Γ a título de premissa

$$(XX):: \quad \frac{\begin{array}{l} B \to A \\ \Gamma \end{array}}{A} \quad (XXX)$$

pode-se abreviar essa inferência de uma das duas maneiras. Ou

$$\begin{array}{rc} (XXX):: & \dfrac{\Gamma \to (B \to A)}{B \to A} \\ (XX):: & \dfrac{}{A} \end{array}$$

ou, de modo mais sucinto

$$(XX, XXX):: \quad \begin{array}{c} \Gamma \to (B \to A) \\ \hline\hline A \end{array}$$

Aqui, o duplo traço de inferência denota que dois juízos dessa inferência estão implícitos. Importa observar que quando à esquerda do traço de inferência ocorrerem dois números, aquele que estiver à direita do outro exprime que o juízo a que este número está associado é anterior na demonstração em questão ao juízo a que o segundo número está associado. Por exemplo, seja a inferência

$$(2,3):: \quad \begin{array}{c} \begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\; A \\ \quad\;\; \llcorner\; B \\ \quad \llcorner\; \Gamma \end{array} \\ \hline\hline \vdash A \end{array}$$

Como o número 3 está mais à direita, isto significa que 3 representa o juízo '$\vdash \Gamma$', enquanto que 2 representa o juízo '$\vdash B$'. E assim, para inferir o juízo '$\vdash A$', antes se faz necessário inferir o juízo '$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; A \\ \quad \llcorner\; B \end{array}$'.

Em resumo, o significado dos números encerrados entre parênteses é o seguinte: a presença de um número significa que acima do traço de inferência há um juízo que, sem ter sido explicitado, mesmo assim é indispensável para a obtenção da conclusão. No que diz respeito ao uso de pontos, a convenção utilizada por Frege parece ser a seguinte. Como a regra de inferência por ele utilizada é *modus ponens*, isto é, p, $p \to q$; logo q, se o juízo suprimido estiver fazendo o papel do enunciado p, então os parênteses serão seguidos de quatro pontos. Por exemplo, seja a seguinte inferência:

$$(5):: \quad \frac{\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; C \\ \quad \llcorner\; D \end{array}}{\vdash C}$$

Aqui, 5 está associado ao juízo '$\vdash D$', o qual faz papel de p na regra de inferência 'p, $p \rightarrow q$; logo q'. Por outro lado, caso o juízo suprimido faça o papel do juízo '$p \rightarrow q$', então os parênteses serão seguidos de dois pontos. Tal é o que se dá, digamos, com

$$(7)\colon \quad \frac{\vdash D}{\vdash C}$$

onde 7 está no lugar do juízo '$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\, C \\ \llcorner\, D \end{array}$' que faz o papel de '$p \rightarrow q$' na regra de inferência.

[36]Frege afirma que *modus ponens* é a única regra de inferência por ele utilizada na conceitografia. Em uma passagem, porém, ele matiza esta afirmação ao reconhecer que usa uma segunda regra quando deriva um juízo a partir de uma única premissa (*Conceitografia*, §6). Mas não explicita qual seja esta regra. Uma análise detalhada de seus processos de prova mostra que em sua lógica são quatro as regras de inferência por ele utilizadas. De início, *modus ponens*, a regra de substituição e a regra de confinamento dos quantificadores a um consequente, isto é, se A é uma expressão que não contém a e se a só ocorre como argumento de $\Phi(a)$, então de

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\, \Phi(a) \\ \llcorner\, A \end{array}$$

pode-se inferir

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a}) \\ \llcorner\, A \end{array}$$

Além das três regras acima mencionas, Frege também utiliza uma quarta regra, isto é, a partir de

$$\vdash X(a)$$

pode-se concluir

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, X(\mathfrak{a})$$

conhecida como regra de generalização universal. Por fim, Bynum sugere que Frege formula, mas não emprega, um princípio de instanciação na seção 11 da *Conceitografia* (Frege, 1972, p. 119, nota 6). Cumpre observar que Frege se refere a todas essas regras por 'regras para aplicação de nossos símbolos' (*Conceitografia*, §13), expressão esta que sugere seu caráter puramente sintático.

[37]A fórmula acima, em nossa nomenclatura, é '$B \rightarrow \neg A$', que é equivalente tanto a '$\neg B \vee \neg A$' como a '$\neg(B \wedge A)$'.

[38]Em nossa nomenclatura, é '$\neg B \rightarrow A$', que é equivalente tanto a '$B \vee A$' como a '$\neg(\neg B \wedge \neg A)$'.

[39]Frege discute agora os dois sentidos da palavra 'ou'. Com efeito, a partícula 'ou' pode ser inclusiva, a saber, '$B \vee A$', e nesta acepção é expressa em termos de implicação do seguinte modo: '$\neg B \rightarrow A$'. Mas o 'ou' pode também ser exclusivo, ou seja, '$B \oplus A$', e assim é expresso em termos de implicação como se segue: '$(B \rightarrow \neg A) \wedge (\neg B \rightarrow A)$'.

[40]Frege aqui nos diz que a conjunção '$(B \rightarrow \neg A) \wedge (\neg B \rightarrow A)$', que é a disjunção exclusiva, pode também ser representada condicionalmente do seguinte modo: '$\neg((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg A))$' ou ainda '$\neg((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(\neg(B \rightarrow A)))$'.

[41]Frege introduz seu sinal para conjunção

$$\left\{\begin{array}{l} B \\ A \end{array}\right.$$

que significa '$A \wedge B$', já que cumpre ser lido de baixo para cima. Com este sinal e a negação é possível se expressar o condicional '$\neg(B \wedge \neg A)$', isto é, '$B \rightarrow A$'.

[42]A fim de explicar o significado do sinal de identidade de conteúdo — simbolizado por '$\equiv$' — Frege formula, embora dele nunca se utilize, uma importante distinção semântica, que decorre das dificuldades com que se depara uma teoria referencial, teoria que esta obra pressupõe, quando se defronta com o problema da igualdade (*Conceitografia*, §8). De fato, ele ponderou tais dificuldades quando pensou introduzir um sinal especial de igualdade no contexto de sua conceitografia. A introdução do sinal de igualdade envolve que se levem em conta as seguintes considerações: (a) Em primeiro lugar, ele torna possível introduzir nomes mais breves em lugar de expressões mais extensas, desde que se estabeleça a identidade de conteúdo entre as duas expressões. Tal é o que se dá nas definições por abreviação. Frege não dá a esta função nenhuma importância especial. (b) Em segundo lugar, todo conteúdo pode ser determinado de diferentes modos. A cada modo diferente de determinar o conteúdo deve-se associar um nome diferente. Portanto, nem sempre é verdade dizer que os diversos nomes que um mesmo conteúdo assume sejam meras multiplicações arbitrárias de abreviações convencionais.

Com frequência, uma multiplicidade de nomes expressa diferenças conteudísticas que transcendem o mero plano dos sinais. Ora, são tais diferenças que se tornam o conteúdo de um juízo.

[43]O conteúdo (*Inhalt*) é a única espécie de significado reconhecido na *Conceitografia*. Este termo é usado, aproximadamente, na mesma acepção vaga que usualmente apresenta o termo 'significado'. Neste livro, se distingue um conteúdo asserível (ex. '3 > 2') de um conteúdo não-asserível (ex. 'casa' e '2'). Frege afirma que antes da publicação de seu artigo *Sobre o Sentido e a Referência* (1892) ainda não tinha estabelecido a distinção entre sentido e referência (Alcoforado, 2009, p. 129-58). Angelelli, no entanto, discorda desta afirmação. Segundo ele, já na *Conceitografia* se encontra de modo inequívoco as distinções que, posteriormente, Frege veio a rotular de 'sentido' (*Sinn*) e de 'referência' (*Bedeutung*). Assim, Angelelli é levado a afirmar que existe em Frege duas concepções semânticas: uma 'oficial' ou 'de direito', rigorosamente diádica: sinal/ conteúdo, e outra 'não-oficial' ou 'de fato'. Com a publicação de *Sobre o Sentido e a Referência* esta dicotomização desaparece no plano das distinções e surge explicitamente a divisão tripartite 'sinal', 'sentido' e 'referência' (Angelelli, 1967, p. 38). A fim de estabelecer seu ponto de vista, Angelelli tomará um argumento de Frege em que este se vê obrigado a desenvolver uma semântica mais complexa que a diádica (cf. §9, nota 1).

Frege aduz o seguinte argumento da geometria para estabelecer que não poucas vezes a multiplicidade de nomes indica importantes diferenças, isto é, nem sempre esta multiplicidade indica um ato de arbitrariedade ou de pura convenção. Eis o argumento: seja um ponto arbitrário qualquer, tomado sobre um círculo, cujo nome é 'A', e seja 'B' o nome do ponto de interseção do círculo com a linha em movimento que gira sobre A. Quando o movimento ocorre ser perpendicular ao diâmetro construído a partir de A, então 'A' e 'B' são nomes do mesmo ponto. Note-se, como assinala Angelelli, que o ponto A era até então objeto apenas de intuição direta: 'o ponto A' mas o mesmo objeto (ponto) pode ser determinado como 'o ponto B que corresponde à posição da rotação da linha reta na qual ela se torna perpendicular ao diâmetro cuja origem é A' (Angelelli, 1967, p. 39). Neste exemplo, devemos distinguir: i) as expressões 'A' e 'B'; ii) o conteúdo das expressões A e B; e, iii) o modo de determinação do conteúdo. Esta tríplice distinção corresponde exatamente à distinção que será ostensivamente desenvolvida em *Sobre o Sentido e a Referência*. Com isto, Angelelli é levado a distinguir na *Conceitografia* duas concepções de significado: uma 'oficial' ou 'de direito', rigorosamente diádica: sinal/ conteúdo, e outra 'não-oficial' ou 'de fato', basicamente triádica, que encerra, no que há de essencial, as teses centrais que, posteriormente, Frege desenvolverá.

[44]A noção de função desenvolvida na *Conceitografia* é vaga e imprecisa. Nesta obra ainda não se estabelece a distinção entre sinal e objeto e, assim sendo, define-se função como certa parte de uma expressão. Mais tarde, em *Função e Conceito* (1891), a distinção entre expressão funcional e função passa a ser realizada com máxima nitidez e, nesse sentido, tal identificação não mais será permitida. A noção de função é abordada nos seguintes termos. Digamos que em uma expressão F em que ocorre o sinal 'a', que designa o objeto a, substituamos a por outros sinais, um após outro, que designem outros objetos. A expressão F, como vemos, é constituída, de um lado, por um 'componente estável que representa a totalidade da relações', e, por outro lado, por um 'sinal que pode ser considerado como substituível por outros sinais e que representa o objeto presente nestas relações' (*Conceitografia*, §9). O primeiro componente da expressão, Frege denomina 'função' e o segundo 'argumento'. Importa aqui tecermos duas observações fundamentais. Em primeiro lugar, uma função é aquilo que expressões da forma $\Phi(A)$ ou $\Psi(A, B)$ designam. Nestas expressões, as letras para argumento A e B têm como domínio não apenas números — como se dá usualmente em aritmética — mas qualquer objeto. Em segundo lugar, as letras gregas maiúsculas quando associam um único argumento cabem ser interpretadas como propriedades ou atributos e assim $\Phi(A)$ deve ser lida 'A tem a propriedade Φ'. Por outro lado, quando associam dois ou mais argumentos, as letras gregas representam relações ou procedimentos — temporais, espaciais, sociais, lógicos, etc. — binários e, deste modo, $\Psi(A, B)$ pode ser lido 'B se encontra na relação Ψ com A'. Neste caso, repare que os termos 'relação' e 'procedimento' são aqui tomados em seu sentido mais amplo e vago (*Conceitografia*, §24). Frege, ao que tudo indica, prefere o termo 'procedimento' provavelmente visando a definir logicamente a indução matemática. Com isto, ele generalizou a noção de função a ponto de poder classificá-la em funções proposicionais e funções não-proposicionais.

[45]Frege pretende que os argumentos de suas funções não se restrinjam a certos e determinados tipos de objetos. Pelo contrário, ele pretende que as funções, tais como são concebidas na *Conceitografia*, possam ter como domínio de seus argumentos não uma parte do universo de discurso, mas a totalidade do universo. Elas poderiam ser usadas, sem maiores explicações, para expressar proposições sobre qualquer entidade, fato ou evento do universo. Assim, $A(x)$, segundo este modo de entender, significa 'tudo tem a propriedade A'; quando tal não é o caso, ele se vale de expressões da forma i) 'nem tudo tem a propriedade A' ou ii) 'nada tem a propriedade A'. Ocorre, porém, que a mera introdução da negação, sem que se estabeleça os meios para delimitar o seu escopo, de nada adianta, já que generalidade e negação atuam sobre partes distintas da sentença (ou da função). Entretanto, tal dificuldade pode ser contornada desde que se introduza um sinal que delimite a generalidade. E seguindo este princípio, Frege o fez pela introdução de um sinal delimitador de generalidade, isto é, o sinal que ele chamou de 'concavidade'. Este acidente notacional, à semelhança da negação, ocorre no traço de conteúdo, originando o que atualmente se denomina de 'quantificador universal'. Com este sinal, pode-se delimitar o escopo da generalidade e, combinando a generalidade com a negação, torna-se possível expressar não só proposições gerais

negativas, como também proposições particulares. A generalidade foi o primeiro operador sobre variáveis empregado em lógica, dando assim origem a moderna teoria da quantificação que permite classificar as variáveis em variáveis livres — as letras latinas — e variáveis ligadas — letras góticas.

[46]O sistema lógico da Conceitografia é composto de nove axiomas que podem ser traduzidos na linguagem contemporânea pelas fórmulas:

(1) $(a \rightarrow (b \rightarrow a))$

(2) $((c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)))$

(8) $((d \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow (b \rightarrow (d \rightarrow a)))$

(28) $((b \rightarrow a) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b))$

(31) $(\neg\neg a \rightarrow a)$

(41) $(a \rightarrow \neg\neg a)$

(52) $((c \equiv d) \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d)))$

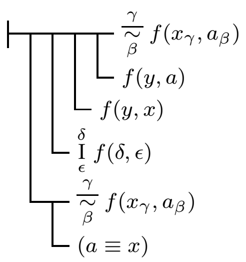
(54) $(c \equiv c)$

(58) $(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \rightarrow f(c))$

À primeira vista, o sistema fregeano aqui exposto parece ser um cálculo da lógica de predicados de primeira ordem com identidade. Nesse sistema axiomático, os seis primeiros axiomas constituem a base do cálculo proposicional; o sétimo e o oitavo axiomas regem a identidade; e, por último, o nono constitui a base da teoria da quantificação de primeira ordem. Contudo, isto não é exatamente verdade, pois, como tentaremos deixar claro mais adiante, os axiomas 52 e 54 — principalmente o 52 — compõem, de certa forma, a teoria proposicional fregeana. Além disso, na Parte III da Conceitografia, Frege admite a quantificação de segunda ordem, e permite ainda no axioma 58 e seus teoremas derivados a substituição por funções de segunda ordem. Portanto, o sistema lógico do presente livro é, na verdade, um cálculo de predicados de segunda ordem.

Importa mencionar que o axioma 8 não é independente, sendo derivável dos axiomas (1) e (2). Tal resultado foi estabelecido por Lukasiewicz em 1929. Ele também veio a mostrar que os seis primeiros axiomas — ou os cinco restante, excluindo-se o axioma 8 — formam um sistema completo do cálculo proposicional. Embora não caiba aqui questionar o resultado de Lukasiewicz, o sistema fregeano, em certo sentido, não é completo. Isto, obviamente, dependerá do que se entende aqui por cálculo proposicional no sistema fregeano. Mais adiante trataremos disto.

[47]Nesta passagem, as letras latinas itálicas '*a*' e '*b*' devem necessariamente expressar conteúdos asseríveis, uma vez que o traço de conteúdo só pode ser anexado a conteúdos passíveis de serem verdadeiros ou falsos (cf. §1). Infelizmente, Frege não fez distinções entre variáveis proposicionais e individuais na *Conceitografia*. Assim, dependendo do contexto, a mesma letra latina pode expressar ora um conteúdo asserível (sendo, neste caso, uma variável proposicional), ora um conteúdo não-asserível (sendo, portanto, uma variável individual). Um exemplo em que as letras latinas itálicas designam variáveis individuais vemos na fórmula 121



da Parte III do presente livro. Cf. também as fórmulas 119, 120 e 121. Esta ambiguidade será mais tarde totalmente dissipada com a reinterpretação do traço de conteúdo como horizontal no livro *Grundgesetze der Arithmetik* (1893).

[48]Frege aqui apresenta a sua primeira lei do pensamento, a saber:

$$a \rightarrow (b \rightarrow a).$$

Tal enunciado (na realidade, uma expressão da metalinguagem da lógica de Frege, embora Frege não faça distinção entre os símbolos da linguagem-objeto e os metalinguísticos), nos diz que se uma proposição qualquer é o caso, então qualquer condicional em que tal proposição seja o consequente também será o caso. Este axioma é evidente, de acordo com Frege, pois se o negássemos, cometeríamos uma contradição, uma vez que $a \rightarrow (b \rightarrow a)$ só seria falso justamente se a fosse falso e b e a fossem verdadeiros. Mas uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

[49]Aqui, Frege apresenta a segunda lei do pensamento:

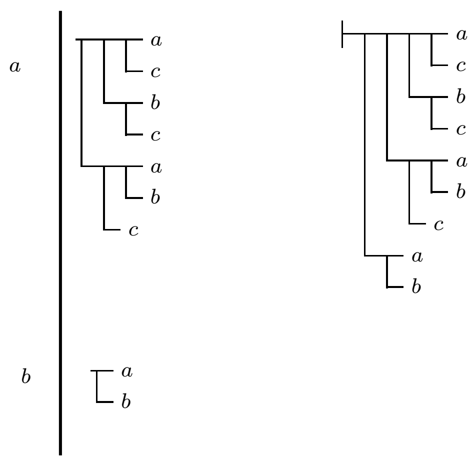
$$(c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a))$$

Tal lei nos diz que se uma proposição é o antecedente de um condicional, então tal proposição se distribui pelo condicional em questão. Intuitivamente, a segunda lei do pensamento afirma que se um condicional é, por assim dizer, "causado" por uma proposição, então, se o antecedente de tal condicional é "causado' por tal proposição, o mesmo vale para o seu consequente.

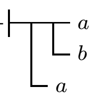
[50]A explicação da evidência deste axioma é similar àquela do primeiro axioma.

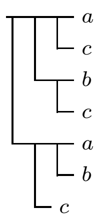
[51]Aqui percebemos o uso implícito de uma regra de inferência que podemos chamar de *regra de substituição uniforme para conteúdos asseríveis* (proposições). Frege assume implicitamente o seguinte fato que hoje compõe a metateoria: se A for uma tautologia, então A', que é obtida a partir de A substituindo-se algumas ou todas as ocorrências de variáveis proposicionais (uniformemente) por fórmulas bem-formadas, também será uma tautologia. A regra de substituição uniforme para conteúdos asseríveis é apresentada no livro por meio de um traço vertical logo abaixo da numeração da fórmula a sofrer a substituição, onde à esquerda ocorre a letra latina a ser substituída e à direita, a letra latina ou fórmula complexa expressando um conteúdo asserível que tomará o seu lugar. Por exemplo, na passagem abaixo

(1)::

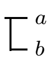


(3

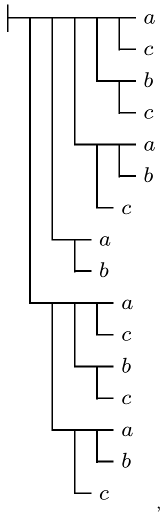
devemos substituir na fórmula (1) —  — a letra latina 'a' pela fórmula complexa



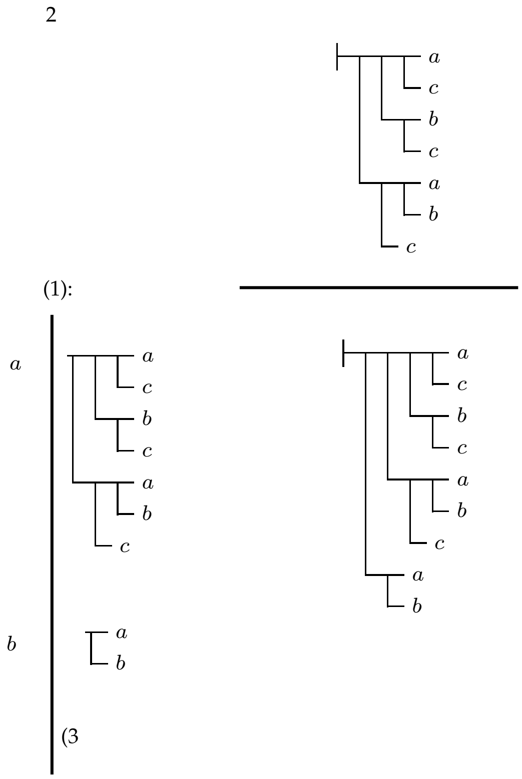
e a letra latina 'b' pela fórmula complexa



Com isso, obtemos a fórmula



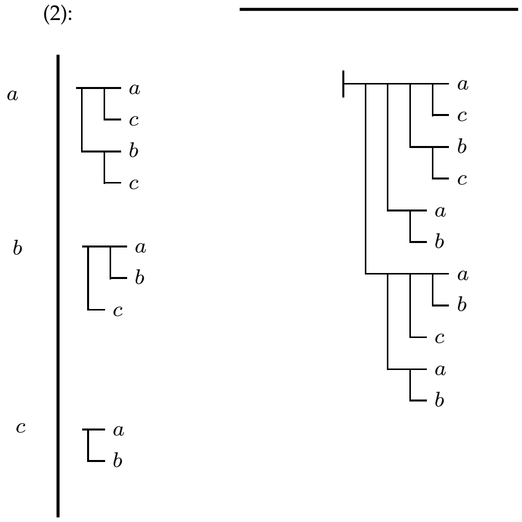
que é uma tautologia. Note que o antecedente da fórmula acima é justamente o axioma 2 da Conceitografia. Portanto, podemos eliminá-lo de acordo com a regra de modus ponens, indicada no livro pela linha horizontal conforme abaixo:



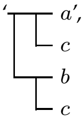
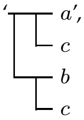
Para a explicação da notação acima, veja nota 35.

Vale mencionar que as substituições de Frege são um tanto ambíguas no sentido de que em inúmeros casos ele substitui uma letra latina por uma fórmula complexa contendo esta mesma letra latina, o que poderia gerar a dúvida se deveríamos novamente substituir a letra latina pela fórmula complexa, acarretando um processo *ad infinitum*. Veja, por exemplo, as substituições na fórmula (2) para derivar a fórmula (4)

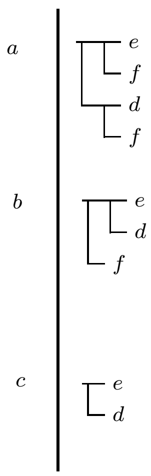
(2):



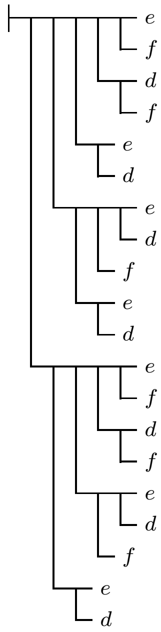
(4

Mas, se devemos substituir 'a' por '', então por que não podemos substituir a letra latina 'a', nesta última fórmula, novamente por '', e assim sucessivamente? Obviamente, não estamos dizendo que as derivações fregeanas estão erradas, contudo o procedimento "não-ambíguo" seria substituir as letras latinas acima por fórmulas complexas que não contivessem tais letras. Por exemplo:

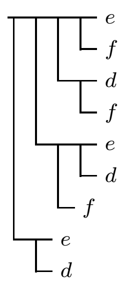
(2):



Destas substituições, obteríamos a fórmula:

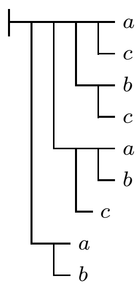


O antecedente da fórmula acima, a saber,



,

é uma instância da fórmula (3) provada no livro. Contudo, Frege seria obrigado a fazer substituições na fórmula (3) para produzi-lo exatamente. Se olharmos a fórmula (3), veremos que ela é:



Assim, podemos conjecturar que estas substituições ambíguas de Frege tinha o intuito de diminuir o número de substituições necessárias nas derivações da *Conceitografia*.

[52]Veja nota 35.

[53]Frege aqui introduz a quarta lei do pensamento (ou o quarto postulado de sua lógica proposicional), a saber:

$$(b \to a) \to (\neg a \to \neg b)$$

Se o fato b condiciona suficientemente o fato a, então é racional esperarmos que o não aparecimento de a implique que sua razão suficiente b não tenha ocorrido. Como o próprio Frege observa logo em seguida, esta lei permite a passagem do *modus ponens* para o *modus tollens*.

[54]A quinta lei do pensamento é o princípio da dupla negação (*duplex negatio affirmat*):

$$\neg\neg a \to a.$$

Esta lei afirma que se uma proposição é negada duas vezes, isto vem a ser o mesmo que afirmá-la. Com o auxílio da proposição (28), a lei em questão nos dá também o "princípio da terceira negação", a saber:

(28) $(b \to a) \to (\neg a \to \neg b)$

(28′) $(\neg\neg a \to a) \to (\neg a \to \neg\neg\neg a)$ [de (28), pela regra da substituição]

(31) $\neg\neg a \to a$

(31′) $\neg\neg\neg a \to \neg a$ [de (28′) e (31), por *modus ponens*]

De fato, as leis (28) e (31) nos garantem os princípios gerais que regulam a negação na lógica clássica: negar uma proposição um número ímpar de vezes é o mesmo que negá-la uma única vez e, por outro lado, negar uma proposição um número par de vezes é o mesmo que afirmá-la.

[55]O teorema (37) afirma que se de uma disjunção verdadeira podemos inferir uma proposição, então podemos inferir a mesma proposição a partir da verdade de somente um dos termos proposicionais que constituem tal proposição. A forma como Frege expõe tal lei da lógica clássica é a seguinte:

$$((\neg c \to b) \to a) \to (c \to a)$$

Em (37), Frege faz uso da equivalência lógica:

$$(c \vee b) \leftrightarrow (\neg c \to b)$$

Obviamente, substituindo c por b, (37) pode-se transformar em:

$$(37') \ ((\neg b \to c) \to a) \to (b \to a)$$

o que nos garante que a lei (37) é o fundamento lógico da tese de que se uma disjunção implica algo, então basta que um dos termos da conjunção seja verdadeiro para que tal implicação continue valendo.

[56]Aqui Frege mostra um exemplo claro, na aritmética, da lei (37), a saber:

$$\forall x \forall y (x \times y = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee y = 0).$$

[57]A expressão (52) consiste no sétimo axioma das leis do pensamento, a saber:

$$(c \equiv d) \to (f(c) \to f(d)).$$

Este axioma nos diz que, se dois conteúdos conceituais coincidem, então qualquer transformação de c é idêntica a mesma transformação realizada com d. Em outras palavras, se c e d representam o mesmo conteúdo conceitual, então o resultado de qualquer procedimento lógico feito com c é idêntico ao resultado do mesmo procedimento feito com d. Com o axioma (52), Frege apresenta a implicação natural que se espera da noção intuitiva de identidade entre conteúdos conceituais: se dois conteúdos conceituais são iguais, então tudo que pode ser dito de um pode também ser dito do outro.

[58]A fórmula (54) é o oitavo axioma das leis do pensamento. Consiste no princípio de identidade, afirmado como

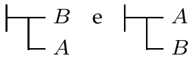
$$c \equiv c.$$

Tal fórmula nos diz que há uma identidade de conteúdo conceitual entre c e ele mesmo, qualquer que seja c. Intuitivamente, (54) afirma que um conteúdo conceitual qualquer é sempre idêntico a si mesmo. Mais tarde, em 1884, quando imbuído da tarefa de definir os números logicamente, Frege usa o axioma (54) a fim de caracterizar o zero como a classe de todos os conceitos equinuméricos ao conceito ($a \neq a$). Como não há objeto que possa satisfazer tal condição, uma vez que isto seria negar a lei do pensamento (54), então esta classe de conceitos — que denotaria o número zero — é constituída de conceitos sob os quais nada cai.

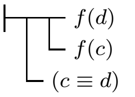
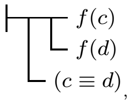
[59]À primeira vista, os axiomas 52 e 54 parecem ser axiomas de uma lógica de predicados de primeira ordem com identidade, sendo o primeiro aquele representando a propriedade de substitutividade da identidade, o último, a propriedade de reflexividade da identidade. Não obstante, principalmente no caso do axioma 52, ao acompanharmos as derivações de Frege, podemos perceber um duplo papel da identidade de conteúdo. As definições fregeanas de conceitos aritméticos introduzidas na Parte III da *Conceitografia* têm a seguinte forma:

$$\Vdash (A \equiv B),$$

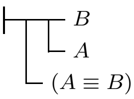
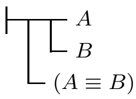
onde A é o definiens e B, o definiendum. Tais definições são posteriormente transformadas em uma espécie de axiomas: $\vdash (A \equiv B)$. E a partir disto, Frege deseja obter os seguintes condicionais:



A derivação destes condicionais é obtida por meio do axioma 52 acima e da fórmula 57, respectivamente

(52)  (57) ,

efetuando-se as seguinte substituições nas fórmulas acima: c por A, d por B e $f(\Gamma)$ por Γ, onde 'Γ' representa o lugar do argumento. Na próxima nota, esta substituição será melhor explicada, mas vale aqui ressaltar que o objetivo de Frege é "eliminar" o símbolo 'f' da fórmula final. Assim, obtemos as seguintes fórmulas:

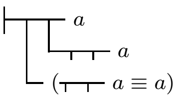
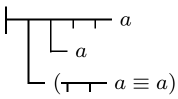
(52′)  (57′) 

Os antecedentes de (52′) e (57′) são "os axiomas" obtidos da definição. Assim, podemos eliminá-los via *modus ponens*, resultando nos condicionais desejados. Portanto, neste caso, a identidade de conteúdo funciona como uma "espécie" de equivalência, embora ela não tenha exatamente o mesmo significado que a equivalência.

O que mencionamos acima serve também para explicar a seguinte passagem do Prefácio da *Conceitografia*, que inicialmente parece estranha:

> Já observei que as fórmulas (31) e (41) podem ser reduzidas a uma única fórmula
> $\vdash$ (┬┬ $a \equiv a$)
> com a qual são possíveis outras simplificações (*Conceitografia*, p. 5-6).

Que simplificações pode Frege ter aqui em mente? Provavelmente, a derivação, como teoremas, das fórmulas 31 e 41 a partir de $\vdash$ (┬┬ $a \equiv a$), para assim diminuir o número de axiomas do sistema. Mas, em que sentido as fórmulas 31 e 41 poderiam ser derivadas de $\vdash$ (┬┬ $a \equiv a$)? Ora, a única maneira que nos ocorre é a derivação feita mediante as fórmulas 52 e 57, ao se efetuar as seguintes substituições: c por ┬┬ a, d por a e $f(\Gamma)$ por Γ. Obtemos assim, respectivamente, as fórmulas:

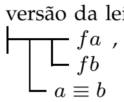
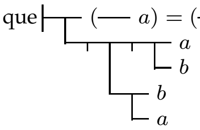
(31a)  (41a) 

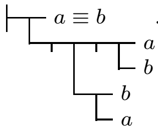
Mas, uma vez que $\vdash$ (┬┬ $a \equiv a$) é agora um axioma do sistema, podemos obter as fórmulas (31) e (41) de (31a) e (41a) por meio de *modus ponens*. Em comunicação pessoal, Gregory Landini mostrou-me que a adição de $\vdash$ (┬┬ $a \equiv a$) ao sistema torna o axioma 54 derivável.

Embora a identidade de conteúdo funcione como uma espécie de equivalência nos casos apresentados acima, ela não tem propriamente o significado da equivalência. Em sistemas proposicionais clássicos, a fórmula seguinte é um teorema:

$$(\textit{Equiv})\text{: } (((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$$

(*Equiv*) é completamente trivial, não obstante, o análogo de (*Equiv*), substituindo-se '$\leftrightarrow$' por '$\equiv$', já não é derivável na *Conceitografia*. Eis o que observa Landini:

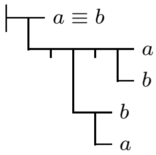
> De minha parte, eu considero que a noção de "mesmidade de conteúdo conceitual" que Frege pretendia era simplesmente a noção de substitutibilidade em todos os contextos da *Conceitografia*. Frege escreveu (Frege, 1879, 21):
>
> Façamos que $\vdash A \equiv B$ signifique: *o sinal A e o sinal B têm o mesmo conteúdo conceitual, de modo que sempre se pode substituir A por B, e reciprocamente.*
>
> Uma versão da lei de Leibniz é adotada como um axioma para governar o símbolo,  , e isto é explicado pelo significado atribuído a "$a \equiv b$". Ora, o símbolo '$\equiv$' foi substituído por '$=$' nas *Leis Básicas*. Portanto, não é insignificante que  $(— a) = (— b)$ seja equivalente a ser intersubstituído *salva veritate*. De acordo com isso, não deveríamos esperar que Frege se queixasse do que seria o seu

> análogo na *Conceitografia*, a saber,  . Certamente, isto não é derivável na *Conceitografia*. (Landini, 1996, p. 137-8, nosso grifo).

Chateaubriand também o percebeu:

> Ademais, no fim do prefácio (p. 8), Frege diz que ele poderia ter combinado as duas leis da dupla negação em uma única fórmula
>
> $$(5) \vdash (\neg\neg\, a \equiv a),$$
>
> que sugere que a identidade pode ser usada para expressar algo parecido à equivalência lógica. Dada as convenções de Frege sobre o uso das variáveis (p.25), (5) é uma fórmula universalmente quantificada que é julgada verdadeira para todos os conteúdos asseríveis. Assim, para cada sentença específica A, os conteúdos conceituais $\neg\neg\, A$ e — A são o mesmo. *Mas, obviamente, isto não vele, em geral, para a condicionalidade; isto é, a partir da caracterização de Frege da condicionalidade não se pode inferir que se a relação de condicionalidade vale entre os conteúdos (de)* A e B *em ambas direções*, então $A \equiv B$. Uma vez que Frege não introduziu as noções de implicação lógica e equivalência lógica, também temos uma questão sobre a relação entre identidade e bicondicionalidade. (Chateaubriand, 2001, p. 270, nosso grifo).

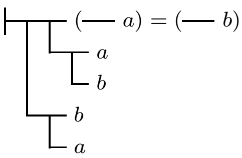
É interessante mencionar que a fórmula $\vdash (\neg\neg\, a \equiv a)$ também não é derivável na *Conceitografia* (cf. Duarte, 2009, apêndice 1). Cumpre ainda acrescentar que a fórmula

(IVa') 

deveria desempenhar um papel importante na derivação do Princípio de Hume a partir da definição explícita de número cardinal em termos de extensão de conceitos (cf. Frege, 1980b, §§68-73). Contudo, uma vez que ela não é derivável na *Conceitografia* e assumindo que o sistema lógico subjacente aos *Fundamentos* é o mesmo daquele da *Conceitografia*, percebemos aqui a existência de um quebra-cabeça.

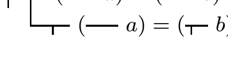
Esse quebra-cabeça torna-se tanto mais complexo quando levamos em conta a hipótese apresentada na nota 18, na qual possivelmente Frege já teria a derivação das leis básicas da aritmética em 1882. Mas como isto é possível, se seu sistema não é completo no sentido aqui explicado? Aqui, estamos assumindo que a lógica proposicional fregeana conta com os seis primeiros axiomas e ainda com os axiomas 52 e 54 e seus teoremas derivados. (IVa') acima deveria ser um teorema do sistema "proposicional" fregeano. E esta fórmula é crucial para a derivação do Princípio de Hume, a partir do qual é possível derivar as leis básicas da aritmética. Aqui, assumimos a seguinte hipótese: Frege derivou as leis básicas da aritmética em 1882 adicionando o Princípio de Hume como uma espécie de axioma ao sistema (cf. Duarte, 2009). Em Duarte (2009, cap. 4), mostramos que as derivações dessas leis básicas a partir do Princípio de Hume não dependem de (IVa') ou de qualquer outra fórmula não derivável no sistema. Aparentemente, a hipótese pode ser correta. Antes, porém, em Duarte (2009, cap. 2), é argumentando que Frege não poderia introduzir (IVa') como um axioma adicional no sistema sem antes fazer a distinção entre sentido e referência e ter introduzido os valores de verdade como objetos, fato que ocorreu apenas sete anos depois da publicação dos *Fundamentos*. Além disso, em Duarte (2009, cap. 3), é mostrado que mesmo com a introdução de (IVa') como um possível axioma em 1884 (ou em 1882), Frege não poderia ter uma teoria das extensões de conceitos, porque ele não teria introduzido o horizontal no sistema, fato que também depende da distinção entre sentido e referência e da introdução dos valores de verdade como objetos.

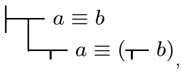
O leitor curioso perceberá ao ler *Grundgesetze* que um análogo da fórmula (IVa'), a saber, o teorema IVa



,

é derivado de um novo axioma introduzido por Frege em 1893, o axioma IV:



Por outro lado, um análogo deste axioma na linguagem da *Conceitografia*, a saber, (IV’) 

também não é derivável no livro de 1879 (cf. Duarte, 2009, Apêndice 1), tampouco (IV’) pode ser adicionado como uma novo axioma sem a distinção entre sentido e referência, a introdução dos valores de verdade como objetos e a interpretação do horizontal como um função de verdade. A causa disto tudo deve-se à introdução das extensões de conceitos em 1884 (cf. Duarte, 2009, caps. 2 e 3).

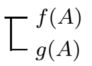
[60]Eis o nono e último axioma da *Conceitografia*. Trata-se da regra de instanciação universal, a saber:

$$(\forall x) f(x) \rightarrow f(c).$$

Dada uma propriedade qualquer, se todos os objetos a possuírem, então o objeto c , em particular, também a possuirá. De forma mais ampla, o axioma (58) nos diz que, para qualquer contexto proposicional, se todos os objetos satisfazem tal contexto, então o objeto c, em especial, também deve satisfazê-lo.

[61]Outra regra de inferência implícita usada por Frege na *Conceitografia* é a regra de substituição para funções. Veja abaixo:

Aqui, Frege está efetuando a substituição da função $f(A)$, onde A é o lugar de argumento, pela função complexa



Novamente, há uma ambiguidade aqui. Frege deveria substituir a função $f(A)$ por outra função (mais complexa no caso) na qual $f(A)$ não ocorresse. Contudo, para evitar excessos de substituições, ele procede da mesma forma que na regra de substituição para conteúdo asseríveis. Na lógica contemporânea, a regra de substituição para relações de primeira ordem — junto com outras regras da lógica clássica — é equivalente ao esquema-axioma da compreensão para relações:

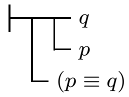
$$\text{(Esq) } \exists X^n \forall x_1...x_n (X^n(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow A(x_1, \ldots, x_n)),$$

onde X^n não deve ocorrer livre em A, pois caso contrário é possível derivar uma contradição. Por exemplo, assumamos que o seguinte é uma instância de (Esq):

$$\exists F^1 \forall x (F^1 x \leftrightarrow \neg F^1 x).$$

Disto facilmente derivamos $\forall x (G^1 x \leftrightarrow \neg G^1 x)$, que é uma contradição. Embora Frege seja cuidadoso sobre este tipo de substituição, ele não segue estritamente (Esq).

O que é mais interessante com relação à regra de substituição para funções é a possibilidade de formação de fórmulas mal-formadas na *Conceitografia*. Observamos acima que para obter condicionais de definições $\Vdash (a \equiv b)$, Frege substitui no axioma 52 ou no teorema 57 a função $f(A)$ por A. Esta função excêntrica seria uma espécie de função identidade cujo valor para o argumento M é o próprio M. O objetivo de Frege é bem claro: eliminar a letra ‘f ’ das fórmulas 52, 57 e seus derivados (por exemplo, teorema 68). Todavia, este método não pode ser universalmente aplicado, pois em certos casos, teríamos a formação de fórmulas não bem-formadas. O símbolo para identidade de conteúdo pode ser aplicado tanto a conteúdos asseríveis como a conteúdos não-asseríveis. No caso dos primeiros, a substituição acima não causa nenhum dano. Ora, uma vez que os símbolos ocorrendo em definições expressam conteúdos asseríveis, ela pode ser aplicada. Por outro lado, no caso de conteúdos não-asseríveis, esta substituição geraria complexos mal formados. Como mostramos acima, a substituição mencionada gera fórmulas como

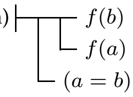


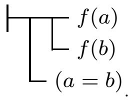
Mas se p e q expressarem conteúdos não-asseríveis, então a fórmula acima será mal-formada, pois o traço de conteúdo não pode ser anexado a conteúdos não-asseríveis. Isto se torna ainda mais contundente com a introdução de definições de objetos individuais nos *Fundamento*s, tais como, definições do número 0 e do número 1.

Provavelmente, Frege percebera este problema em relação a esta substituição. Isto parece ser confirmado com a introdução do horizontal como uma função de verdade em *Grundgesetze*. O leitor notará neste livro que Frege continua obtendo condicionais a partir de suas definições que agora têm a forma:

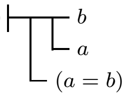
$$\Vdash (a = b)$$

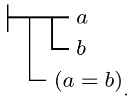
O sistema também encerra análogos das fórmulas 52 e 57:

(IIIa) 

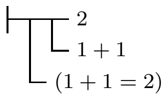
(IIIc) 

Nas fórmulas IIIa e IIIc, Frege substitui a função '$f(A)$' por '$—\!\!—\ A$', obtendo assim:

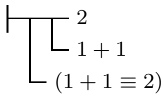
(IIIa′) 

(IIIc′) 

Porém, agora, o problema não ocorre, pois o horizontal aplica-se tanto a "conteúdos asseríveis" como a "conteúdos não-asseríveis". O seguinte é bem-formado em *Grundgesetze*: $—\!\!—\ 2$, que denota o falso. A fórmula abaixo seria verdadeira em *Grundgesetze*:



enquanto seu análogo na Conceitografia



seria mal-formado.

[62]A terceira parte da *Conceitografia* tem por intuito apresentar aquilo que Frege denomina 'teoria geral das sequências'. Segundo ele, a noção de sequência (*Reihe*) é de natureza estritamente lógica e, por conseguinte, é um dado *a priori* da razão. Na qualidade de um conceito lógico ou racional, a sequência não pode ser identificada com nenhuma interpretação particular que o termo 'sequência' possa, em seu uso corrente, sugerir. Assim, não é o caso de darmos a esse termo uma interpretação precipuamente temporal, tampouco é adequado exemplificarmos o sentido fregeano de sequência mediante exemplos espaciais ou que envolvam relações que se dão neste ou naquele domínio específico de objetos. Em todos estes enfoques particulares, a noção fregeana de sequência sempre está subjacente como o aparato lógico ou racional que permite que, nos exemplos particulares ou intuitivos de sequência, certas propriedades sequenciais se verifiquem sistematicamente. Tais propriedades que sempre se verificam em todos os domínios particulares ou intuitivos de sequências são as propriedades lógicas inerentes ao conceito geral ou lógico de sequência, conceito este que é meramente instanciado desta ou daquela maneira nas diversas interpretações intuitivas de sequências particulares. O que Frege se propõe a desenvolver na terceira parte da *Conceitografia* são os conceitos e os teoremas lógicos ou gerais inerentes à noção de sequência vista como um puro conceito lógico.

A necessidade de apresentar uma teoria lógica das sequências deriva da preocupação de Frege de fundamentar em sólida base racional os números naturais. E como a noção geral de sequência é, como vimos acima, estritamente lógica, segue-se que, se for possível reduzir a sequência numérica à teoria geral das sequências, fica estabelecida a fundamentação racional dos naturais. Dado que os números são apercebidos como uma sequência bem definida e assim faz-se possível a redução das propriedades sequenciais dos números às propriedades lógicas. Mas, para que tal redução se dê a contento, Frege tem de dispor, de antemão, de um aparato conceitual postuladamente lógico, que sirva de fundamento a todos os conceitos e proposições aritméticas que tratem dos números como um domínio sequencial. Para cada conceito aritmético entendido intuitivamente como sequencial, tem que existir um conceito estritamente lógico que lhe sirva de fundamento; para cada verdade aritmética que descreva uma propriedade sequencial válida dos números, tem de haver uma proposição da teoria geral das sequências que lhe valide como uma lei geral da lógica. Em outras palavras, a aritmética, analisada como uma teoria dos números vistos em sentido ordinal, está fundamentada logicamente na teoria geral das sequências. Mas isto envolve quatro conceitos, a saber, hereditariedade, precedência ou ancestralidade, pertinência e univocidade.

[63]Aqui temos a primeira definição indispensável para a fundamentação da aritmética na lógica: a noção de propriedade hereditária em uma sequência f. Em um simbolismo moderno, esta definição fregeana seria a seguinte:

$$Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta, \alpha)) =_{df} (\forall b)(Fb \rightarrow (\forall a)(fba \rightarrow Fa)).$$

Por ser uma definição, a expressão acima como um todo não é a uma proposição propriamente dita, mas a mera abreviação de uma proposição completa, a saber, a mera abreviação da fórmula à direita do símbolo '$=_{df}$', isto é, do *definiens* da definição supracitada. Frege salienta, ao introduzir de seu símbolo bidimensional — aqui reduzido a $Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta,\alpha))$—, que este cabe ser usado como uma mera abreviação do *definiens*, vale dizer, da proposição que especifica o sentido do que vem a ser uma propriedade hereditária em uma sequência f.

[64]Neste trecho, Frege explicita em que sentido deve ser tomado a palavra 'sequência'. Uma sequência nada mais é que um predicado lógico diádico ou de dois lugares, ou uma relação lógica, causal ou não, envolvendo dois objetos, propriedades ou proposições. Por sua irrestrita generalidade, fica claro que qualquer compreensão particularizada de sequência seria insuficiente para esgotar o escopo de seu alcance, como Frege alerta na introdução de sua teoria geral das sequências.

[65]De maneira intuitiva e discursiva, Frege explicita o sentido que se deve atribuir ao fato de uma propriedade ser hereditária em uma sequência. O conceito de hereditariedade de uma propriedade só faz sentido quando associado a uma sequência. Dizer apenas que uma propriedade é hereditária e nada mais é não dizer nada. Sempre que uma propriedade P for qualificada como hereditária em uma sequência f quer se dizer que, se a um dado termo a, dessa sequência f, não importa o que a designe, for atribuído um predicado P, então qualquer outro termo b, tal que b resulte de a por meio de$f$ — isto é, fab —, então Pb. No caso das propriedades aritméticas, a hereditariedade dependerá da escolha adequada da sequência ou operação aritmética. Por exemplo, no caso da operação sucessor '$n+1$' $(0, 1, 2, 3, \ldots)$, a propriedade 'ser par' não é hereditária, posto que, por exemplo, 2 é par, mas seu sucessor imediato '$2 + 1 = 3$' não o é, pois 3 é ímpar. Já para a sequência '$n + 2$' $(0, 2, 4, 6, \ldots)$, obviamente, 'ser par' é um propriedade hereditária.

[66]Cabe aqui explicitar a maneira pela qual Frege demonstra as proposições da teoria geral das sequências. Em primeiro lugar, para demonstrar a proposição (72), Frege apresenta como premissa inicial a própria definição de propriedade hereditária em uma sequência f. A definição de propriedade hereditária aparece associada ao número que indica sua ordem de aparição na *Conceitografia* como um todo, isto é, como a definição sexagésima nona. O segundo passo é a proposição de número (68) em que são feitas as substituições indicadas por Frege. No simbolismo atual, a proposição (68) é a seguinte:

$$(((\forall a)fa \leftrightarrow b) \to (b \to fc)).$$

Esta proposição expressa que, se b for equivalente a $(\forall a)fa$, então, dado b, podemos inferir fc, que é uma instância de $(\forall a)fa$. Nesta proposição — que é uma lei geral da lógica —, substituímos a por b, a expressão funcional f por '$F(T) \to ((\forall a)f(T, a) \to F(a)$', em que T indica o lugar que deve ser ocupado pelo argumento da expressão resultante de f, independentemente do que seja este argumento que resulta das substituições que serão feitas, e, por último, substituímos em (68) b por $Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta,\alpha))$ e ainda c por x. Como resultado final de todas essas substituições, temos a fórmula (68) sob um novo aspecto:

$$[((\forall b)(Fb \to (\forall a)(Fba \to Fa)) \leftrightarrow Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta,\alpha)) \to \\ (Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta,\alpha)) \to (Fx \to (\forall a)(Fxa \to Fa))]$$

A partir da fórmula (68), podemos inferir, por *modus ponens*, a fórmula (70). De fato, analisando a fórmula (68), tal como é dada acima, vemos que $Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta,\alpha))$, o antecedente de '$Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta,\alpha)) \to (Fx \to (\forall a)(Fxa \to Fa))$', ocorre no primeiro passo da demonstração, na qualidade da definição de propriedade hereditária em uma sequênciaf f. Aqui toma-se a intersubstituibilidade entre o bicondicional '$\leftrightarrow$' e o símbolo de '$=_{df}$', usado por Frege para introduzir um novo símbolo mediante definição. A intersubstituibilidade ocorre com frequência na *Conceitografia*.

Mas a demonstração não para aqui. Na fórmula (19) são feitas as substituições indicadas por Frege. A partir destas e por outra aplicação de *modus ponens* na fórmula (19) após as substituições, tem-se a proposição (71). Na fórmula (58) realizam-se as substituições indicadas, chegando-se a uma fórmula cujo antecedente é a proposição (71) — o que é indicado por Frege pelo uso do símbolo '::'. Portanto, por mais uma aplicação de *modus ponens*, chega-se ao teorema

$$Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta,\alpha)) \to (Fx \to (Fxy \to Fy)).$$

De forma geral, as demonstrações são todas baseadas na regra de substituição e em aplicações de *modus ponens* nas expressões resultantes destas substituições. Vale notar que, para Frege, a regra da substituição pode ser usada sempre que preserve a condição seguinte: *se a fórmula T é um axioma ou um teorema da lógica, então a expressão $T*$, resultante de T por meio de substituições, também terá de ser um axioma ou um teorema da lógica.*

[67]O parágrafo 26 destina-se à apresentação do conceito de x precede y em uma sequência f, em outras palavras, x é o ancestral de y na sequência f. O conceito de precedência ou ancestralidade é o substrato lógico da noção de ordem em uma sequência, sendo que, por "ordem", entenda-se aqui qualquer relação possível em que se possa falar em primeiro, segundo, terceiro, ..., n-ésimo termo de um domínio qualquer de objetos. Mais precisamente, a noção de *x é o ancestral de y na sequência f* permite dar um sentido lógico ao ato de ordenar um domínio de objetos, tal que a referida ordenação tenha um primeiro elemento. Esta noção torna qualquer outra intuição, que não a lógica, desnecessária para fundamentar o ato de ordenar um domínio qualquer de objetos. Neste sentido, Frege coloca-se em posição diametralmente oposta a de

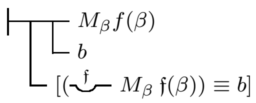
Kant, para quem o tempo, forma a priori da sensibilidade, é o fundamento da ordenação das intuições sensíveis e mesmo da sequência dos números naturais. Em símbolos, a definição de *x é o ancestral de y na sequência f* é como se segue:

$$Anc_{\gamma,\beta} f(x_\gamma, y_\beta) =_{df} (\forall F)[Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta,\alpha)) \rightarrow ((\forall a)(fxa \rightarrow Fa) \rightarrow Fy))].$$

Basicamente, tal expressão nos diz que, se uma dada propriedade F for hereditária em f, então qualquer objeto a que surja de x pela aplicação da sequência f, tem a propriedade F. Dentre tais objetos a, podemos arbitrariamente tomar o objeto y e, por conseguinte, y terá a propriedade F. Intuitivamente, podemos dizer que *x é ancestral de y na sequência f* quando, iniciando-se com x, chegamos sempre a y pela aplicação sucessiva de f; e, por ancestralidade, *tudo aquilo que for afirmado de x pode ser afirmado de y*.

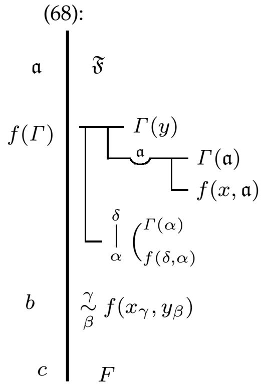
É a relação de ancestralidade que garante, por exemplo, que a sequência dos números naturais possa ser gerada a partir do *zero*. Se o *zero* é número natural e se 'ser número natural' é uma propriedade hereditária na sequência 'sucessor de', então qualquer objeto *k* que surja de *zero* por aplicações sucessivas de 'sucessor de' será um número natural, tal que *zero* seja o elemento ancestral de qualquer número natural finito.

[68]Para chegar a (77) por *modus ponens*, Frege deve usar uma proposição envolvendo quantificação sobre funções. Assim, (68) deve ser substituída por uma sentença análoga de segunda ordem, a saber,



Nesta expressão, M_β representa uma função que é associada à função f de argumento β. As substituições próprias para, mediante (76), obter (77) por *modus ponens*, são as seguintes:

(68):



[69]A proposição (81) consiste na fundamentação lógica do princípio de indução, tal como este foi de início enunciado por Jakob Bernoulli em 1688. Em notação moderna, a fórmula 81 tem a seguinte forma:

$$[((Fx \rightarrow Her_{\delta,\alpha}(F(\alpha), f(\delta,\alpha))) \rightarrow Anc_{\gamma,\beta} f(x_\gamma, y_\beta)) \rightarrow Fy]$$

Em síntese, a proposição (81) expressa que, se um objeto x tem a propriedade F, de forma que tal propriedade seja hereditária, então qualquer que seja o objeto y, dado que x é ancestral de y, tem a propriedade F.

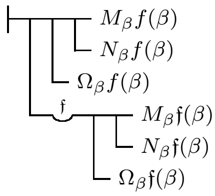
A relação direta com o princípio de indução é evidente. Como é sabido, o princípio de indução afirma que, se *zero* tem a propriedade P e se dado um número qualquer n, da hipótese de n ter a propriedade P implicar que $n+1$ também tem essa propriedade P, então todos os números têm a propriedade P, isto é:

$$(\forall P)[(P0 \wedge (\forall n)(Pn \rightarrow Pn+1)) \rightarrow (\forall n)Pn].$$

Em sua versão original explicitada acima, o princípio de indução é de aplicação restrita ao domínio dos números naturais. Mas, em sua nova arquitetura, o princípio de indução passa a ser um teorema da *Conceitografia*, e assim, passa agora a ser visto como uma lei geral do pensamento, uma lei da lógica cuja validade é universal e irrestrita.

[70]No original alemão, lê-se (72). Mas trata-se de um mero equívoco tipográfico, pois a expressão correta para a derivação da fórmula (87) é a de número (73).

[71]Como no teorema (77), a proposição (93) necessita, para ser demonstrada, de uma sentença formalizada em linguagem de segunda ordem. Assim, a proposição (60) deve ser expressa sob a seguinte forma:



Nesta nova sentença formalizada em um cálculo de segunda ordem, as substituições adequadas para a obtenção de (93), por *modus ponens*, são as seguintes:

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{F}$
$f(\Gamma)$	$\Gamma(y)$
$g(\mathit{\Gamma})$	$\begin{matrix}\delta\\ \vert\\ \alpha\end{matrix}\left(\begin{matrix}\mathit{\Gamma}(\alpha)\\ f(\delta,\alpha)\end{matrix}\right.$
$h(\mathit{\Gamma})$	$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\left[\begin{matrix}\mathit{\Gamma}(\mathfrak{a})\\ f(x,\mathfrak{a})\end{matrix}\right.$
b	$\mathfrak{F}$

[72]Eis o terceiro conceito fregeano indispensável para a fundamentação da aritmética na lógica: o *de pertinência a uma sequência* f ou dito de maneira mais explícita x *pertence a uma sequência* f *terminada com* z. A introdução deste conceito assegura que a comparabilidade entre objetos, quaisquer que estes sejam, sempre é possível, já que se trata de uma exigência da razão ou da lógica. Em símbolos usuais, a noção fregeana aqui introduzida expressa-se do seguinte modo:

$$Anc^{*}_{\gamma,\beta}(x_\gamma, z_\beta) =_{df} \neg Anc_{\gamma,\beta} f(x_\gamma, z_\beta) \rightarrow (x = z).$$

A fórmula acima expressa o seguinte: se x não é o ancestral de z na sequência f, então x é igual a z. Disto decorre que, ou bem x é o ancestral de z em f, ou então x é igual a z. Dados dois objetos quaisquer x e y, sempre entre eles é possível estabelecer uma relação de anterioridade, consoante algum processo ou critério determinado. É um fato que a razão humana, por sua própria constituição, está sempre apta a atribuir a dois objetos quaisquer uma precedência, de tal forma que um seja o *primeiro* e o outro o *segundo*; pois não é o caso de se apresentarem à razão objetos ou coisas essencialmente incomparáveis, de tal forma que não seja possível hierarquizá-los segundo uma relação. Em qualquer contexto em que as leis da lógica ou do pensamento puro estejam presentes, existe, por conta do conceito de *pertinência em uma sequência* f, a ordenação total dos objetos que compõem tal contexto. De fato, como nos diz a definição de Frege, *se entre dois objetos quaisquer não há um ancestral em relação a uma sequência determinada, então estes objetos são iguais em relação a tal sequência*.

[73]Aqui a noção de função é apresentada pela primeira vez como um conceito lógico. Vimos que o termo 'sequência', em Frege, tem o sentido geral de um predicado lógico qualquer. Mas, para fundamentar a aritmética na lógica, é essencial que a noção de correspondência funcional também seja tomada logicamente. De fato, uma função nada mais é do que uma sequência fregeana que associa, para qualquer objeto a, um *único objeto* b; é justamente esta *univocidade* de sequências que Frege postula como sendo um conceito lógico, básico e *a priori* da razão humana. Em símbolos, o conceito aqui introduzido de *procedimento muitos-para-um* é como se segue:

$$Func_{\delta,\epsilon} f(\delta, \epsilon) =_{df} (\forall a)(\forall b)(fab \rightarrow (\forall c)(fac \rightarrow b = c)).$$

Como se vê, a noção fregeana de *procedimento muitos-para-um* permite que qualquer função aritmética, em especial a função sucessor, tenha o seu comportamento propriamente funcional legitimado como instanciação de um conceito lógico inerente à razão humana. Toda tentativa de fundamentar o caráter funcional das operações aritméticas em pressupostos não lógicos é de imediato rechaçada por Frege mediante a noção de *procedimento muitos-para-um*. Para Frege, o ato de associar *um único objeto* a outro *único objeto* é de natureza eminentemente lógica e, quando a razão humana faz qualquer tipo de relação desta natureza, está colocando em ação o conceito de *procedimentos muitos-para-um*.

Nesta mesma linha de pensamento está situado Richard Dedekind. Em sua tentativa de representar os números mediante as leis do pensamento e nada mais — que Dedekind assimila às leis da *lógica* —, ele leva em conta apenas a capacidade humana de relacionar objetos, da maneira funcional acima assinalada. Para Dedekind, 'quando contamos um agregado ou uma pluralidade de coisas, somos levados a considerar a capacidade do pensamento de relacionar coisas a coisas, de deixar uma coisa corresponder à outra coisa, ou de representar [uma] coisa mediante [uma] outra coisa, capacidade esta sem a qual nenhum pensamento é possível' (Dedekind, 1963, p. 32). Assim como Dedekind, Frege também admitia que o ato intelectual de *associar algo a algo* é precipuamente lógico e, por conseguinte, *a priori*. O conceito de *procedimentos* *muitos-para-um* é, assim, o fundamento de qualquer correspondência funcional que a razão possa conceber e, em especial, serve como substrato lógico das funções definidas na aritmética.

[74]Frege encerra a *Conceitografia* como uma tabela indicativa de como cada fórmula de sua obra foi introduzida, em termos de sua *derivabilidade lógica*. Tal tabela consiste de linhas verticais mais grossas e outras mais finas, além da listagem de todas as fórmulas utilizadas na *Conceitografia*. Dadas duas fórmulas quaisquer da tabela, vizinhas imediatamente entre si, se entre elas ocorrem uma *linha mais grossa*, isto significa que a fórmula à direita foi introduzida ou como definição ou como axioma e, portanto, a fórmula à esquerda não exerceu qualquer papel dedutivo para a sua introdução. É o caso, por exemplo, da fórmula 115, a definição de *procedimento muitos-para-um*: a fórmula 84, imediatamente à sua esquerda na tabela, não foi utilizada em nenhum procedimento dedutivo que desse como conclusão a fórmula 115. Se, ao contrário, a linha que delimita duas fórmulas for *mais clara*, significa que a fórmula à esquerda foi utilizada em uma dedução que deu por resultado a fórmula à direita. Tomemos, por exemplo, a fórmula 88. Acompanhando a tabela, vemos que tal fórmula foi deduzida na *Conceitografia* com auxílio das fórmulas 15 e 87.

Bibliografia

P. Alcoforado, G. *Frege, Lógica e Filosofia da Linguagem*, 1a ed., São Paulo, Cultrix/EDUSP, 1978; 2ª ed., São Paulo, EDUSP, 2009.

I. Angelelli, *Studies on Gottlob Frege and Tradicional Philosophy*, Dordrecht, Reidel, 1967.

G. Anscombe, *Introduction to Wittgenstein's Tractatus*, London, Hutchinson, 1959.

B. Birjukov, *Two Soviets Studies on Frege*, Dordrecht, Reidel, 1964.

G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, reimpresso da edição de 1847, Bristol, Thoemmes Press, 1998.

______. *An Investigation of the Laws of Thought*, reimpresso da edição de 1854, New York, Dover Publications, 1958.

G. Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Chicago e Londres, Open Court Publishing, 1915.

O. Chateaubriand, *Logical Forms Part I*: Truth and Description, Campinas, São Paulo, Coleção CLE, Vol 34, 2001.

A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, 5 ed., Princeton, Princeton University Press, 1967.

R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, traduzido W. Beman, New York, Dover Publications, Inc, 1963.

A. Duarte, *Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Gottlob Frege*, Tese de Doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Junho 2009.

R. Egidi, *Ontologia e conoscenza matematica*: Un saggio su G. Frege, Firenze, Sansoni, 1963.

G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, editado por I. Angelelli, Hildescheim, Georg Olms Verlag, 1964.

______, *Nachgelassene Schriften*. Editado por H. Hermes et. al., Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1969.

______, *Conceptual Notation and Related Articles*, traduzido e editado por T. W. Bynum, Oxford: Clarendon Press, 1972.

______, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, editado por G. Gabriel et. al., Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1976.

________, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, editado por G. Gabriel et. al., Chicago, The University of Chicago Press, 1980a.

______, *The Foundations of Arithmetic*, traduzido por J. L. Austin, Oxford, Basil Blackwell, 1980b.

______, *Os Fundamentos da Aritmética*, traduzido por L. H. dos Santos, São Paulo, Abril Cultural, 1980c.

______, *Investigações Lógicas*, organização, trabalho, tradução e notas de P. Alcoforado, Porto Alegre, EDIPUCRS, 2002.

K. Gödel, 'Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Functionenkalküls', *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, pp. 349–360, 1930.

A. Gómez-Lobo (ed.), G. *Frege, Lógica y Semántica*, Valparaíso, EUV, 1972.

R. Grassmann, *Die Begriffslehre oder Logik. Zweites Buch der Formenlehre oder Mathematik*, Grassman, Stetin, 1872.

J. Grooten, & J. Steenbergen, *New Encyclopedia of Philosophy*, New York, Philosophical Library, 1972.

J. Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, Cambridge Mass., Harvard University Press, 1967.

C. Imbert (ed.), G. Frege, *Écrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil, 1971.

W. S. Jevons, *Pure Logic*: or the Logic of Quality apart from Quantity, with Remarks on Boole's System, and on the Relation of Logic and Mathematics, Stanford, London, 1864.

P. Jourdain, 'The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics', *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 43, pp. 219-314, 1911-12.

I. Kant, *Crítica da Razão Pura*, traduzido por M. P. dos Santos & A. F. Morujão, introdução e notas de A. F. Morujão, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

W. E. H. Kluge, G. Frege, *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, New Haven, Yale U. P., 1971.

G. Kneebone, *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, London, Van Nostrand, 1965.

G. Landini, 'Decomposition and Analysis in Frege's Grundgesetze', *History and Philosophy of Logic*, 17, pp. 121-39, 1996.

J. Largeault, *Logique et Philosophie chez Frege*. Paris, Nauwelaerts, 1970.

J. Łukasiewicz, 'Zur Geschichte der Aussagenlogik'. *Erkenntnis*, 5, p. 111-131, 1935.

H. Maccoll, 'The calculus of equivalent statements and integration limits', *Proceedings of the London Mathematical Society*, IX, pp. 9-20, 1877/78a.

__________ . 'The Calculus of Equivalent Statements (II)', *Proceedings of the London Mathematical Society*, IX, pp. 177-186, 1877/78b

___________. 'The Calculus of Equivalent Statements (III)', *Proceedings of the London Mathematical Society*, X, pp. 16-28, 1878/9.

___________. 'Symbolical Reasoning', *Mind*, 5, pp. 45-60, 1980.

___________. 'Implicational and Equational Logic', London, *Edinburgh e Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5th ser., 11, pp. 40-43, 1881.

C. Mangione (ed.), G. Frege, *Logica e Aritmetica*, traduzido por L. Geymonat & C. Mangione, Torino, Boringhieri, 1977.

J. S. Mill, *A System of Logic*, Honolulu, Hawaii, University Press of the Pacific, 2002.

U. Moulines (ed.), G. *Frege, Estudios sobre Semántica*, Barcelona, Ariel, 1971.

J. D. P. Nicod, 'Number of the Primitive Propositions of Logic', *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19, pp. 31-41, 1917.

P. H. Nidditch, *The Development of Mathematical Logic*, London, Routledge & K. Paul, 1966.

H. Padilla (ed), G. *Frege, Conceptografía, Los Fundamentos de la Aritmética y otros Estudios Filosóficos*, Mexico, UNAM, 1972.

G. Peano, *Dizionário di Matematica*, *Parte I: Logica matematica*, Torino, 1901. Republ. *Opere Scelte*, vol. II, Roma, 1958.

C. S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, 8 vols.,* edited by Charles Hartshorne, Paul Weiss e Arthur W. Burks, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1931-1958.

D. Runes (ed.), *Dictionary of Philosophy*, New York, Philosophical Library, 1942.

E. Schröder, *Der Operationskreis des Logikkalküls*, Leipzig, B.G. Teubner, 1877.

________, 'Rezension von Freges Begriffsschrift'. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 25, p. 81-94, 1880.

C. Thiel, *Sense and Reference in Frege's Logic*, Dordrecht, Reidel, 1968.

F. A. Trendelenburg, *Historiche Beiträge zur Philosophie*, 3 vols., Berlin, Vermichte Abhandlungen, 1846-1867.

M. Trinchero, *La Filosofia dell'Aritmetica di Gottlob Frege*, Torino, Giappichelli, 1967.

J. von Neumann, 1923, 'Zur Einführung der transfiniten Zahlen', *Acta Szeged* 1, 199-208, traduzido e reimpresso in: Heijenoort, 1967, 346-54.

J. Walker, *A Study of Frege*. Oxford, Blackwell, 1965.

L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, London, Routledge, 1961.

Índice Remissivo