Sistema de BS

9 de junho de 2019

Sintaxe

Alfabeto

- Letras latinas (termos usados para expressar generalidade) — dois tipos (§1 de BS)

1. a, b, c, d, x, y, z — usadas para conteúdos conceituais
2. f, g, h, F — usadas para funções

- Letras góticas: (§11 de BS)
- $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{d}$ — percorrendo conteúdos conceituais
- $\mathfrak{F}$ — percorrendo funções

Sintaxe

Conteúdos Conceituais São divididos em conteúdos judicáveis e conteúdos não-judicáveis (§2)

- Traço de juízo: $\vdash$ (§2)
- Traço de conteúdo: $—$ (§2)

Sintaxe

- Traço condicional: $\begin{array}{l}\overline{}\!\!\!\!\!\!\lceil\\ \llcorner\end{array}$ (§5)
- Traço de negação: $\overline{\top}$ (§7)
- Identidade de conteúdo: $\equiv$ (§8)
- Quantificador universal: $\text{—}\smile\text{—}$ (§11)

Regras de Boa Formação

- Se A for um termo que designa um conteúdo judicável, então $— A$ será um termo
- Se $— A$ e $— B$ forem termos, então $\begin{array}{l}\lceil\!\!— B\\ \llcorner\!\!— A\end{array}$ será um termo
- Se $— A$ é um termo, então $\top\!\!— A$ será um termo

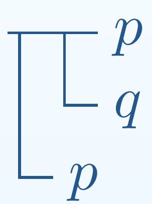
Sintaxe

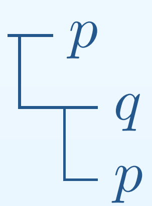
- Se A e B forem termos que expressam conteúdos conceituais, $A \equiv B$ será um termo
- Se T for uma funcão n-ária e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ expressarem conteúdos conceituais, então $T(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ será um termo
- Se $T(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ expressar um conteúdo judicável, então $-\!\!-\, T(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ será um termo
- Se $-\!\!-\, T(u)$ for um termo, então $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\, T(\mathfrak{a})$ será um termo.
- Fórmulas são obtidas anexando-se o traço de juízo: $\vdash A$

Sintaxe

A importância do traço horizontal: eliminar uso de parênteses.

Suponha que Frege tivesse apenas o traço condicional, como ele poderia expressar $p \to (q \to p)$ e $(p \to q) \to p$?





- Sintaxe
- Sintaxe
- Sintaxe
- Sintaxe
- Sintaxe
- Semântica
- Semântica
- Semântica
- Regras de inferências
- Regras de inferências
- Regras de inferências
- Regras de inferências
- Traduções
- Axiomas
- Axiomas
- Axiomas
- Axiomas
- Axiomas
- Axiomas
- Observação
- Axiomas
- Observação
- Prova
- Observação
- Observação
- Observação
- Axioma
- Axiomas
- Axiomas

Semântica

- Traço do conditional

Dados dois conteúdos judicáveis A e B, há 4 possibilidades:

1. A é o caso e B é o caso
2. A é o caso e B não é o caso
3. A não é o caso e B é o caso
4. A não é o caso e B não é o caso

O símbolo $\begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!\!\!-\!\!\!\!\!-\!\!\!\!\!\!\!\top\, B \\ \quad\;\; \llcorner\, A \end{array}$[1] exclui a linha 2. Assim, a traço conditional é uma espécie de condicional material

[1] $A \to B$ é verdadeiro.

Semântica

- Traço de Negação

Dado um conteúdo conceitual A, há duas possibilidades

1. A é o caso
2. A não é o caso

$\vdash\!\!\!\!\top\!\!\!-\, A$ exclui a linha 1.

Semântica

- Identidade de conteúdos

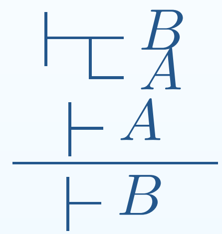
$A \equiv B$ será o caso, se A e B expressarem o mesmo conteúdo conceitual; não será o caso, caso contrário

- Quantificação

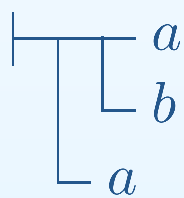
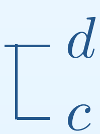
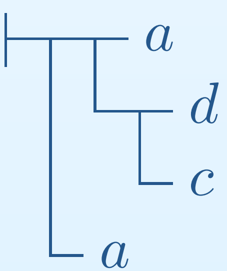
$-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}- F(\mathfrak{a})$ é o caso, se $— F(a)$ é o caso qualquer que seja a

Regras de inferências

- Modus Ponens



(§6)

- Regra de substituição uniforme para conteúdos conceituais
- Seja a fórmula: 
- Isso é uma tautologia. Substitua b por 
- A fórmula resultante  será uma tautologia

Regras de inferências

- Regra de substituição uniforme para funções
- Seja a fórmula $\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!\begin{array}[t]{l} \text{———}\; F(c) \\ \;\;\llcorner\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\text{—}\; F(\mathfrak{a}) \end{array}\end{array}$
- Isso é uma verdade lógica. Substitua a função $F\xi$ pela função $\begin{array}{l} \text{——}\; H(\Gamma) \\ \llcorner\; G(\Gamma) \end{array}$
- Obtemos a fórmula $\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!\begin{array}[t]{l} \text{————}\; H(c) \\ \qquad\llcorner\; G(c) \\ \;\;\llcorner\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\text{——}\; H(\mathfrak{a}) \\ \qquad\qquad\llcorner\; G(\mathfrak{a}) \end{array}\end{array}$, que continua sendo uma verdade lógica.

Regras de inferências

- Regra de generalização universal: de $\vdash F(a)$, derive $\vdash\!\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\, F(\mathfrak{a})$

Regras de inferências

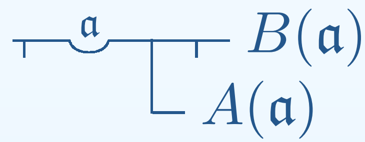
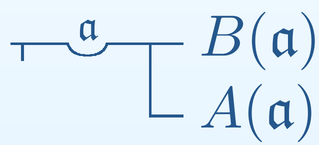
- Regra de confinamento do quantificador universal ao consequente: de

$$\BGassert\BGconditional{A}{T(u)},$$

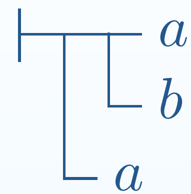
onde u não ocorre em A, podemos derivar

$$\BGassert\BGconditional{A}{\BGquant{\mathfrak{a}} T(\mathfrak{a})},$$

Traduções

- Todo A é B: 
- $\forall x(A(x) \to B(x))$
- Nenhum A é B: 
- $\forall x(A(x) \to \neg B(x))$
- Algum A é B: 
- $\neg\forall x(A(x) \to \neg B(x))$
- Algum A não é B: 
- $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$

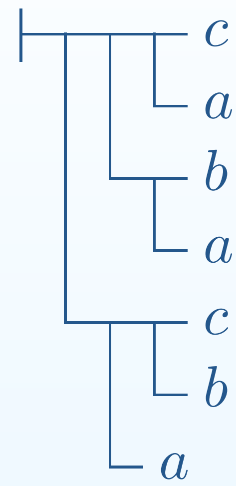
Axiomas



(Axioma 1)

- $\vdash a \rightarrow (b \rightarrow a)$

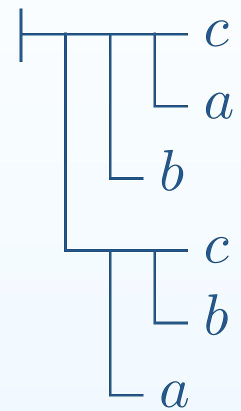
Axiomas



(Axioma 2)

- $\vdash a \to (b \to c). \to .(a \to b) \to (a \to c)$

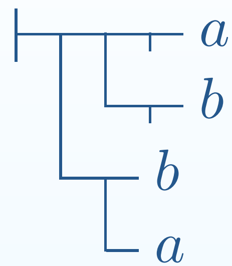
Axiomas



(Axioma 8)

- $\vdash a \rightarrow (b \rightarrow c). \rightarrow .b \rightarrow (a \rightarrow c)$

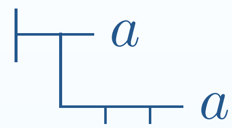
Axiomas



(Axioma 28)

- $\vdash a \rightarrow b. \rightarrow .\neg b \rightarrow \neg a$

Axiomas



(Axioma 31)

- $\vdash \neg\neg a \to a$

Axiomas

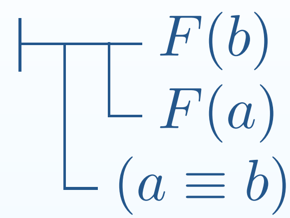
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\frown\!\!\!\frown\, a \\ \quad \llcorner\, a \end{array} \qquad \text{(Axioma 41)}$$

- $a \to \neg\neg a$

Observação

No prefácio a BS, Frege sugere que as fórmulas 31 e 41 podem ser derivadas a partir da seguinte fórmula: $\vdash (\smile\, a \equiv a)$, que poderia ter sido inclu´ida como axioma. Ele não apresenta a derivação, que depende dos axiomas 52 e do teorema 57.

Axiomas



(Axioma 52)

- $\vdash a \equiv b \rightarrow (F(a) \rightarrow F(b))$

Observação

A partir do axioma 52, Frege deriva a fórmula 57 (teorema 57):

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!\quad F(a) \\ \qquad\quad F(b) \\ \qquad (a \equiv b) \end{array} \qquad \text{(Teorema 57)}$$

É partir destas duas fórmulas (52 e 57) que as fórmulas 31 e 41 seriam obtidas se Frege tivesse introduzido $\vdash (\;a \equiv a)$ como axioma.

Prova

- Assuma que $\vdash (\neg\neg\, a \equiv a)$
- Pela regra de substituição para conteúdos conceituais (em 52), temos: $\vdash\begin{array}{l} F(a) \\ F(\neg\neg\, a) \\ (\neg\neg\, a \equiv a) \end{array}$
- Pela regra de substituição de funções, a saber, substituir a função $F(\Gamma)$ por Γ, obtemos: $\vdash\begin{array}{l} a \\ \neg\neg\, a \\ (\neg\neg\, a \equiv a) \end{array}$
- Por modus ponens, obtemos $\vdash\begin{array}{l} a \\ \neg\neg\, a \end{array}$
- A fórmula 41 seria obtida da mesma forma, usando-se o teorema 57.

Observação

Em geral, acredita-se que o axioma 52 compõe a lógica de predicados de Frege. Mas, na verdade, ele faz parte também da lógica proposicional. De fato, uma crítica que Frege faz a Boole é justamente a separação entre proposições primárias e proposições secundárias. Na sua visão, a conceitografia não faz tal distinção.

Observação

- Observação: na verdade, por causa do traço de conteúdo, ainda há um resquício de tal divisão. Isso só será completamente superado quando o traço de conteúdo é tranformado no horizontal que representa uma função característica:

$$
— \Delta \begin{cases} = \text{V, se } \Delta \text{ é V} \\ \\ = \text{F, se } \Delta \text{ não é o V} \end{cases}
$$

Observação

Em BS, —— 2 é mal-formado, portanto não tem valor de verdade.

Em Grundgesetze (GGA), —— 2 é bem-formado e se refere ao F (uma vez que 2 não é verdadeiro)

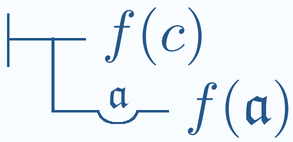
Em BS, $\begin{array}{l} \!-\!\!\!\top\, 2 \\ \;\;\llcorner\, 2 \end{array}$ é mal formado. Portanto, na fórmula $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, a \\ \;\;\llcorner\, a \end{array}$, '$a$' refere-se apenas a conteúdos judicáveis.

Em GGA, $\begin{array}{l} \!-\!\!\!\top\, 2 \\ \;\;\llcorner\, 2 \end{array}$ é bem-formado e refere-se ao verdadeiro. É uma instância de $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, a \\ \;\;\llcorner\, a \end{array}$ e, portanto, podemos afirmar: $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, 2 \\ \;\;\llcorner\, 2 \end{array}$

Axioma

$$\vdash c \equiv c \qquad \text{(Axioma 54)}$$

Axiomas



(Axioma 58)

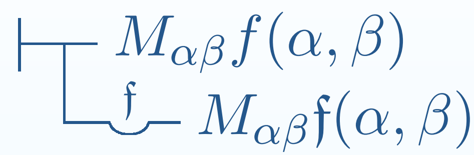
- $\vdash \forall x F(x) \rightarrow F(c)$

Axiomas

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!\top\!\!- M_\beta f(\beta) \\ \qquad \!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\! \mathbin{\smile^{\mathfrak{f}}}\!\!- M_\beta \mathfrak{f}(\beta) \end{array} \qquad \text{(Axioma 58*)}$$

- $\vdash \forall F M_\beta F(\beta) \to M_\beta G(\beta)$

Axiomas

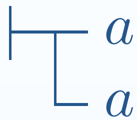


(Axioma 58**)

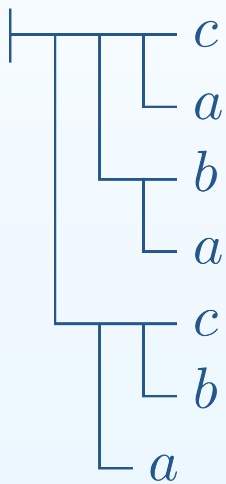
- $\vdash \forall F M_{\alpha\beta} F(\alpha, \beta) \rightarrow M_{\alpha\beta} G(\alpha, \beta)$

- Sintaxe
- Sintaxe
- Sintaxe
- Sintaxe
- Sintaxe
- Semântica
- Semântica
- Semântica
- Regras de inferências
- Regras de inferências
- Regras de inferências
- Regras de inferências
- Traduções
- Axiomas
- Axiomas
- Axiomas
- Axiomas
- Axiomas
- Axiomas
- Observação
- Axiomas
- Observação
- Prova
- Observação
- Observação
- Observação
- Axioma
- Axiomas
- Axiomas

Exemplo de derivação em BS



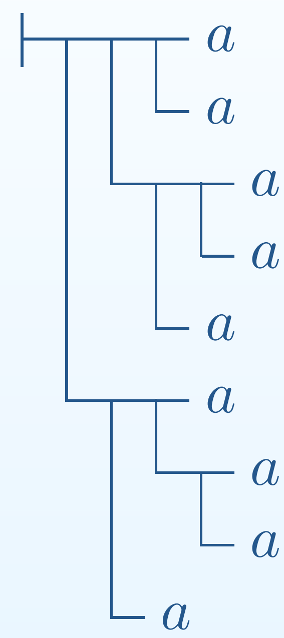
Tome o axioma 2



e faça as seguintes substituições: b por  e c por a.

Exemplo de derivação em BS

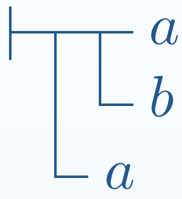
Obtemos então:



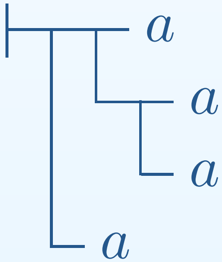
(1)

Exemplo de derivação em BS

Tome agora o axioma 1

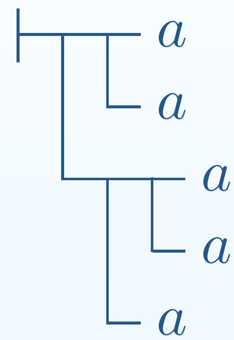


e substitua b por . Obtemos

 (2)

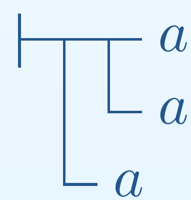
Exemplo de derivação em BS

Aplicando modus ponens em (1) e (2), obtemos:



(3)

Novamente, no axioma 1, substitua b por a, obtendo assim:

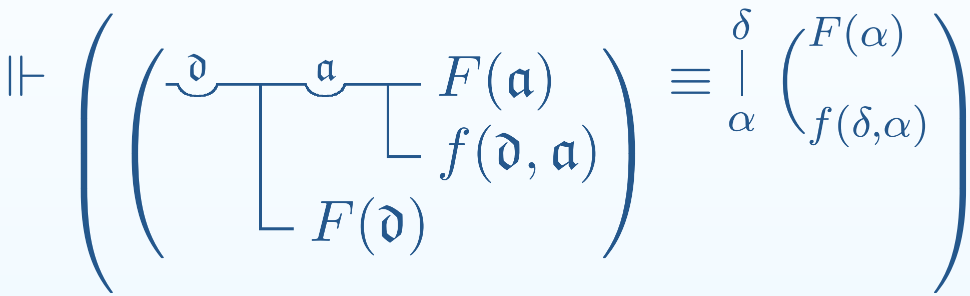


(4)

Aplicando MP em 3 e 4, chegamos à fórmula desejada.

Definições

- Definição de Hereditariedade (conceito de segunda ordem)

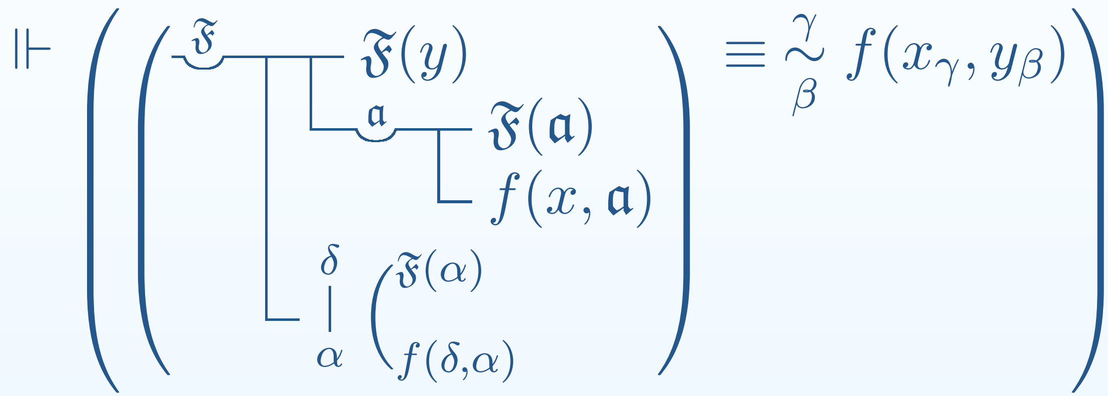


(Hereditariedade)

- Uma propriedade F é hereditária em uma relação f se e somente se para quaisquer objetos x, y se x tem a propriedade F e se x está na relação f com y, então y tem a propriedade F
- $Her_{\alpha,\beta}(F(\alpha), f(\alpha,\beta)) =_{def} \forall x \forall y (F(x) \& f(x,y) \rightarrow F(y))$

Definições

- Definição de ancestral forte (conceito de primeira ordem)



(Ancestral forte)

- y segue-se após x na relação f se e somente se para qualquer propriedade F, se F é hereditária na relação f e para todo z, se x está na relação f com z, então z tem F, então y tem a propriedade F.
- $f^*(x, y) =_{def} \ \forall F\{[Her_{\alpha,\beta}(F(\alpha), f(\alpha, \beta)) \& \forall z(f(a, z) \rightarrow F(z))] \rightarrow F(y)\}$

Definições

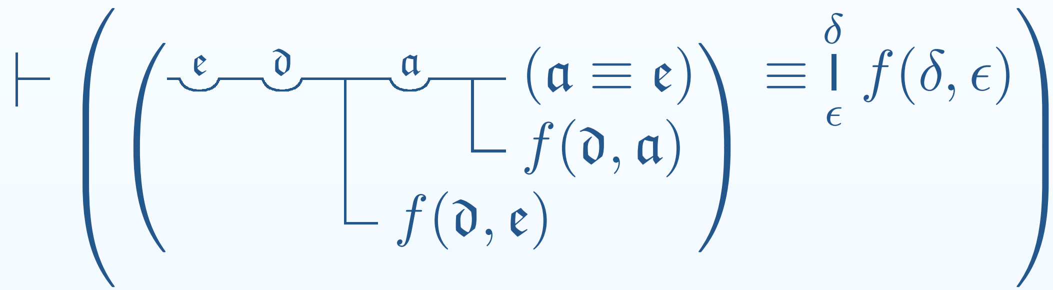
- Definição de ancestral fraco (conceito de primeira ordem)

$$\Vdash \left(\left(\begin{array}{l} \,\,(z \equiv x) \\ \,\,\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \end{array} \right) \equiv \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \right) \qquad \text{(Ancestral fraco)}$$

- y pertence a f-série iniciado por x se e somente se y é um ancestral forte de x ou y é igual a x.
- $f^{*=}(x, y) =_{def} \; f^{*}(x, y) \vee y \equiv x$

Definições

- Definição de funcionalidade (conceito de segundo ordem)

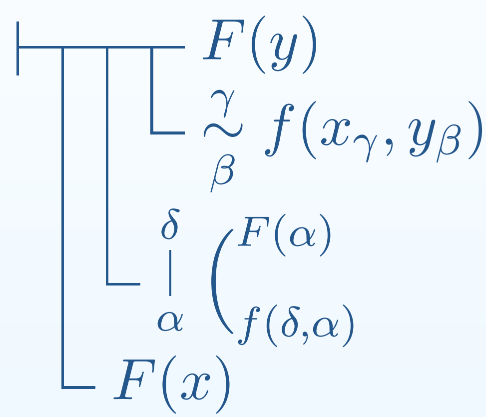


(Funcionalidade)

- $Func_{\alpha\beta} f(\alpha, \beta) =_{def} \ \forall x \forall y \forall z (f(x,y) \& f(x,z) \rightarrow y \equiv z)$

Teoremas

- Teorema 81 (Indução matemática)



(Teorema 81)

Prova de 81

Assuma (1) $F(x)$, (2) $\forall x \forall y(F(x) \& f(x,y) \rightarrow F(y))$ e (3)$\forall F\{[\forall x \forall y(F(x) \& f(x,y) \rightarrow F(y)) \& \forall z(f(x,z) \rightarrow F(z))] \rightarrow F(y)\}$. Devemos derivar $F(y)$. Instanciando universalmente (3), temos

(4)

$[\forall x \forall y(F(x) \& f(x,y) \rightarrow F(y)) \& \forall z(f(x,z) \rightarrow F(z))] \rightarrow F(y)$

(Frege usará o axioma 58* e as substituições apropriadas para funções e aplicará MP). Instanciando universalmente em (2), obtemos (5) $F(x) \& f(x,z) \rightarrow F(z)$. Uma vez que $F(x)$, então temos (6) $f(x,z) \rightarrow F(z)$[2]. Portanto, generalizando universalmente, obtemos (7) $\forall z(f(x,z) \rightarrow F(z))$. Uma vez que temos (2) e (7), podemos formar a conjunção que exatamente o antecedente de (4). Aplicando MP, obtemos $F(y)$.

[2] $p \& q \rightarrow r, p \vdash q \rightarrow r$

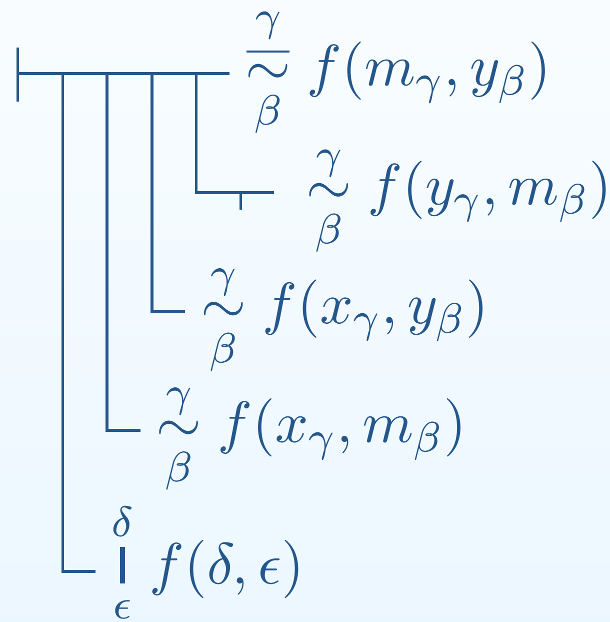
Teoremas

- Teorema 98 (transitividade do ancestral forte)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, z_\beta) \\ \qquad\llcorner\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(y_\gamma, z_\beta) \\ \quad\llcorner\ \overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta) \end{array} \qquad \text{(Teorema 98)}$$

Teoremas

- Teorema 133



(Teorema 133)